Démonstration des Formules de trigonométrie

Laurent Guyard

24 mars 2022

Table des matières

1 Introduction

Les formules de trigonométrie sont nombreuses. Elles sont utiles pour simplifier et transformer les expressions en sinus et cosinus, dans les calculs d'integrales ou pour la résolution d'équations trigonométriques. Le présent document donne le principe de la démonstration des principales formules. Il permet, en cas de défaillance de la mémoire, de retrouver ces différentes formules.

2 Démonstrations

2.1 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Cette formule connue depuis le collège, n'est rien d'autre que le théorème de pythagore appliqué à un triangle d'hypothénuse 1. Dessinons ce triangle dans le cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1).

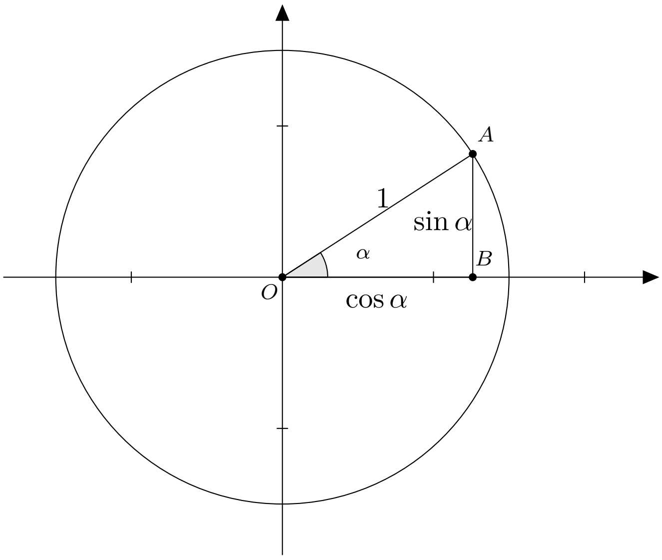

FIGURE 1 – Pythagore revisité

OA l'hypothénuse a pour longueur 1. OB a pour longueur le cosinus de l'angle $\widehat{BOA}$. AB a pour longueur le sinus de l'angle $\widehat{BOA}$. AB. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle OBA rectangle en B on obtient :

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

Ce qui s'écrit

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

La tangeante s'exprime à partir de sinus et cosinus

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Enfin rappelons les formules élémentaires du cours.

$$\begin{array}{ll}
\cos(-x) = \cos x & \sin(-x) = -\sin x \\
\cos(x+\pi) = -\cos x & \sin(x+\pi) = -\sin x \\
\cos(\pi - x) = -\cos x & \sin(\pi - x) = \sin x \\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x & \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x
\end{array}$$

2.2 Somme des angles

Pour la somme des angles α et β, la situation est la suivante :

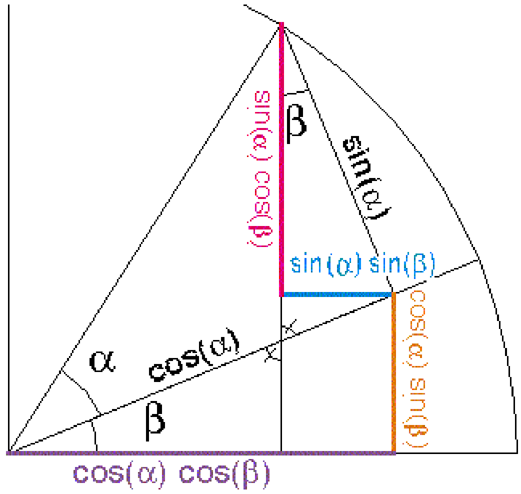

FIGURE 2 – $\cos(\alpha+\beta)$
Source : http://clowder.net/hop/cos(a+b).html

Géométriquement, on en déduit que

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Le paragraphes ci-après fournit une démonstration différente, utilisant des calculs de distance.

2.2.1 $\cos(a-b)$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Démonstration : Sur le cercle trigonométrique, de centre O, on place les points

- $C(1,0)$, le point d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses
- $A(\cos a, \sin a)$, A est tel que la mesure de l'angle $\widehat{COA}$ soit égale à a
- $B(\cos b, \sin b)$, B est tel que la mesure de l'angle $\widehat{COB}$ soit égale à b
- $D(\cos(a-b), \sin(a-b)$, D est tel que la mesure de l'angle $\widehat{COD}$ soit égale à $b-a$

Les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{COD}$ sont égaux et ont pour mesure $a-b$. Par conséquent les distances AB et CD sont égales. Exprimons ces distances à l'aide des coordonnées des points A, B, C, D. On rappelle que la distance entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, dans un repère orthonormé est donnée par :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\begin{aligned}
AB^2 &= (\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 \\
&= \cos^2 b - 2\cos b \cos a + \cos^2 a + \sin^2 b - 2 \sin b \sin a + \sin^2 a \\
&= 2 - 2\cos b \cos a - 2 \sin b \sin a \\
CD^2 &= (\cos(a-b) - 1)^2 + sin(a-b)^2 \\
&= \cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + 1 \sin^2(a-b) \\
&= 2 - 2\cos(a-b)
\end{aligned}$$

En égalant les deux expressions on obtient

$$AB^2 = CD^2$$

$$2 - 2\cos b \cos a - 2\sin b \sin a = 2 - 2\cos(a-b)$$

Et finalement

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

2.2.2 $\cos(a+b)$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Démonstration : Cette formule se déduit de $\cos(a-b)$. En effet, en remplaçant b par $-b$, et en tenant compte de $\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = -\sin b$ On obtient

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a-(-b))\\ &= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)\\ &= \cos a \cos b + \sin a(-\sin b)\\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

Finalement

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

2.2.3 $\sin(a-b)$

$$sin(a-b) = \sin a \cos b \sin b \cos a$$

Démonstration : Pour tout x on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. On passe donc du sinus au cosinus en utilisant l'angle complémentaire.

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b\\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

2.2.4 $\sin(a+b)$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Démonstration : On remplace b par $-b$ dans la formule $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin(a-(-b))\\ &= \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b)\\ &= \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

2.2.5 $\tan(a-b)$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \text{avec} \qquad a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Démonstration :

$$\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

En divisant par $\cos a \cos b$ le numérateur et le dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned}
\tan(a-b) &= \frac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\
&= \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} - \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 + \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\
&= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

2.2.6 $\tan(a+b)$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Démonstration : On remplace b par $-b$ dans la formule $\tan(a-b)$.

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \tan(a-(-b)) \\
&= \frac{\tan a - \tan(-b)}{1 + \tan a \tan(-b)} \\
&= \frac{\tan a - \tan(-b)}{1 + \tan a \tan(-b)} \\
&= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

2.3 Angles doubles

2.3.1 $\cos 2a$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

Démonstration : Il suffit de poser $a = b$ dans la formule $\cos(a+b)$

$$\begin{aligned}
\cos(a+a) &= \cos a \cos a - \sin a \sin a \\
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a
\end{aligned}$$

En tenant compte de $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ on obtient les formules de Carnot

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\
&= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\
&= 2\cos^2 a - 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\
&= (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a \\
&= 1 - 2\sin^2 a
\end{aligned}$$

2.3.2 $\sin 2a$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\sin(a+a) &= \sin a\cos a + \sin a\cos a\\ \sin 2a &= 2\sin a\cos a\end{aligned}$$

2.3.3 $\tan 2a$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \quad \text{avec} \quad a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, 2a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Démonstration : Il suffit remplacer b par a dans la formule $\tan(a+b)$

$$\begin{aligned}\tan 2a &= \tan(a+a)\\ &= \frac{\tan a + \tan a}{1-\tan a\tan a}\\ &= \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\end{aligned}$$

2.4 Formules de Simpson

2.4.1 $\sin p + \sin q$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Démonstration : La formule résute de

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = (\sin a\cos b + \sin b\cos a) + (\sin a\cos b - \sin b\cos a) = 2\sin a\cos b$$

Posons

$$p = a+b = p \qquad q = a-b$$

La résolution du système

$$\begin{cases} a+b &= p\\ a-b &= q\end{cases}$$

Nous donne immédiatement

$$a = \frac{p+q}{2} \qquad b = \frac{p-q}{2}$$

Il reste à remplacer a et b par leur valeur en fonction de p et q pour obtenir

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2.4.2 $\sin p - \sin q$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Démonstration : On procède comme ci-dessus.

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = (\sin a\cos b + \sin b\cos a) - (\sin a\cos b - \sin b\cos a) = 2\cos a\sin b$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$$

En remplaçant par a et b par leur valeur en fonction de p et q on obtient

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2.4.3 $\cos p + \cos q$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Démonstration :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = (\cos a\cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2\cos a \cos b$$

En remplaçant par a et b par leur valeur en fonction de p et q on obtient

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2.4.4 $\cos p - \cos q$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Démonstration :

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = (\cos a\cos b - \sin a \sin b) - (\cos a \cos b + \sin a \sin b) = -2\sin a \sin b$$

En remplaçant par a et b par leur valeur en fonction de p et q on obtient

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2.4.5 $\tan p + \tan q$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \qquad p \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad q \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Démonstration :

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q}$$

En réduistant au même dénominateur on obtient :

$$\begin{aligned}\tan p + \tan q &= \frac{\sin p \cos q + \sin q \cos p}{\cos p \cos q}\\ &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}\end{aligned}$$

3 Transformation de produits en sommes

3.1 $\sin a \cos b$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right] &= \frac{1}{2}\left[(\sin a \cos b - \sin b \cos a) + (\sin a \cos b + \sin b \cos a)\right]\\ &= \frac{1}{2}(2\sin a \cos b)\\ &= \sin a \cos b\end{aligned}$$

Finalement

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)$$

3.2 $\sin a \sin b$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

Démonstration :

$$\frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = \frac{1}{2}[(\cos a \cos b + \sin a \sin b) - (\cos a \cos b - \sin a \sin b)] \quad = \frac{1}{2}(2\sin a \sin b) = \sin a \sin b$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

3.3 $\cos a \cos b$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

Démonstration :

$$\frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] = \frac{1}{2}[(\cos a \cos b + \sin a \sin b) + (\cos a \cos b - \sin a \sin b)] \quad = \frac{1}{2}(2\cos a \cos b) = \cos a \cos b$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

4 Expression en fonction de tangente

Les fonctions sinus et cosinus s'expriment à partir de la fonction tangente.

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} \qquad\qquad \sin\theta = \frac{2\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

Démonstration :

$$\tan\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)} = \frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}$$

De même

$$\tan\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)} = \frac{\cos b-\cos a}{\sin a-\sin b}$$

Posons $a=\theta$ et $b=0$. Il vient

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

et donc

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

Pour alléger les notations posons $t=\tan^2\dfrac{\theta}{2}$. Il vient :

$$t^2\cos\theta + t^2 = 1\cos\theta$$

$$(1+t^2)\cos\theta = 1-t^2$$

et finalement

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Déterminons l'expression de $\sin\theta$.

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta) = 1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}$$

Finalement

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

5 Fonctions dérivées

5.1 Dérivée de $\cos x$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

Démonstration : Pour calculer le nombre dérivé d'une fonction au point d'abscisse x, il faut calculer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Pour la fonction cosinus on doit donc calculer

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

Or pour h petit $\cos h \simeq 1$ et $\sin h \simeq 1$, il vient

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\simeq\frac{\cos x-h\sin x-\cos x}{h}=\frac{-h\sin x}{h}=-\sin x$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sin x$$

5.2 Dérivée de $\sin x$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x=\cos x$$

Démonstration : On doit calculer

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}$$

En tenant compte de h petit

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\simeq\frac{\sin x+h\cos x-\sin x}{h}=\frac{h\cos x}{h}=\cos x$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x=\cos x$$

5.3 Dérivée de $\tan x$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=1+\tan^2 x$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser la formule de dérivation d'un quotient

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x&=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos^1-\sin^2 x}{\cos^2 x}\\&=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\\&=1+\tan^2 x\end{aligned}$$

6 Formulaire

$$\cos^1 x + \sin^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{array}{ll}
\cos(-x) = \cos x & \sin(-x) = -\sin x \\
\cos(x+\pi) = -\cos x & \sin(x+\pi) = -\sin x \\
\cos(\pi - x) = -\cos x & \sin(\pi - x) = \sin x \\
\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x
\end{array}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$sin(a-b) = \sin a \cos b \sin b \cos a$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$