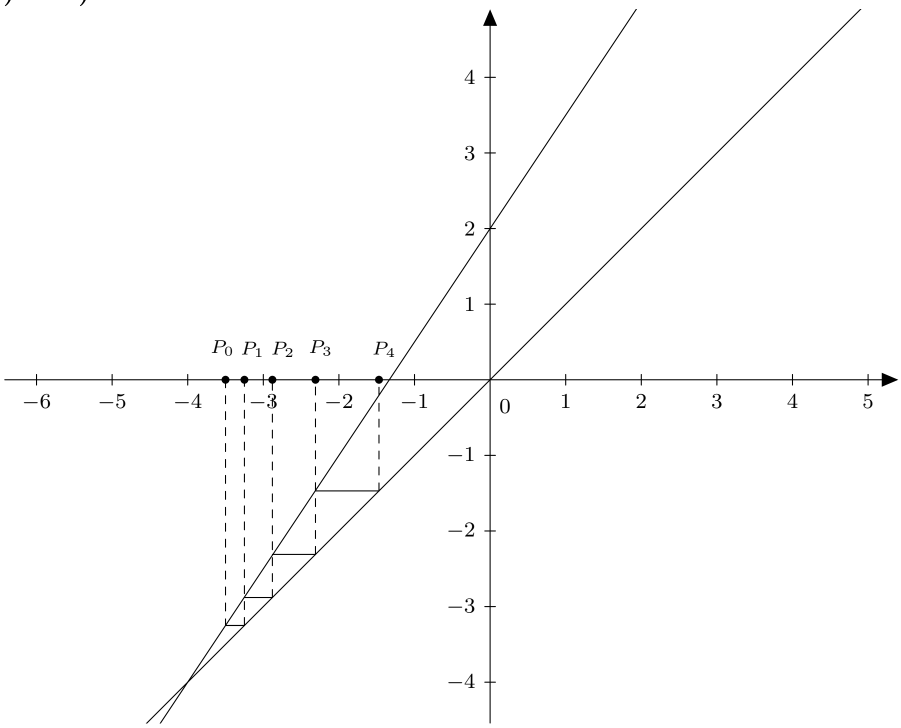
Corrigé DM2 - TS2

02/10/2016

1 Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -3,5$ et $u_{n+1} = 1,5u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 a) et b)



1 c) Au vu du comportement des premiers termes, la suite (u_n) semble croissante et avoir pour limite $+\infty$. Il s'agit donc d'une suite divergente.

2) On introduit la suite (c_n) définie par $c_n = v_n + 4$.

2a) Montrons que (c_n) est géométrique.

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= u_{n+1} + 4 \\
&= \frac{3}{2}u_n + 2 + 4 \\
&= \frac{3}{2}u_n + 6 \\
&= \frac{3}{2}\left(u_n + \frac{6}{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(u_n + 6 \times \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{3}{2}(u_n + 4) \\
&= \frac{3}{2}c_n
\end{aligned}$$

(c_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $c_0 = u_0 + 4 = -3,5 + 4 = -\frac{1}{2}$.

2b) (c_n) étant géométrique $c_n = c_0 q^n$ donc

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

On en déduit u_n

$$u_n = c_n - 4 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 4$$

Conclusion

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 4$$

2c) (c_n) est une suite géométrique de raison supérieure à 1 et de premier terme positif, donc sa limite est $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} c_n - 4 = +\infty$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

3a) La suite (u_n)est croissante. On souhaite savoir quand u_n dépasse une certaine valeur A. Donc, tant que la valeur A n'est pas atteinte, on calcule les termes successifs de la suite, ce qui nous donne l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l}
Saisir\ A \\
N < -0 \\
U \leftarrow -3,5 \\
Tant\ que\ U \leq A\ Faire \\
\quad N \ \leftarrow \ N+1 \\
\quad U \ \leftarrow \ 1,5 \times U + 2 \\
Fin\ Tant\ Que \\
Afficher\ N
\end{array}$$

3b) Pour $A = 10\ 000$ l'algorithme donne la valeur $n = 25$. Il est possible de trouver n sans l'algorithme. On cherche n tel que

$$u_n > 10\ 000$$

Or nous disposons de l'expression de u_n, donc l'inéquation s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 4 > 10\ 000$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n > 10\ 000 + 4$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > 2 \times 10\ 004$$

$$n \ln \frac{3}{2} > \ln 20\ 008$$

$$n > \frac{\ln 20\ 008}{\ln \frac{3}{2}}$$

$$n > 24,42$$

n étant entier on trouve $n = 25$.

2 Exercice 2

La suite (x_n) est définie par :

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} \qquad x_0 = 5$$

a) Montrons par réccurence que pour tout n entier naturel $1 \leq x_n \leq 5$.

$x_0 = 5$ donc $1 \leq x_0 \leq 5$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $1 \leq x_n \leq 5$. Montrons que $1 \leq x_{n+1} \leq 5$. D'après notre hypothèse de réccurence

$$1 \leq x_n \leq 5$$

$$3 \leq x_n + 2 \leq 7$$

La fonction racine carrée étant croissante

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{x_n + 2} \leq \sqrt{7}$$

et donc

$$1 < \sqrt{3} \leq x_{n+1} \leq \sqrt{7} < 5$$

On a donc bien $1 \leq x_{n+1} \leq 5$ et nous pouvons conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq x_n \leq 5$$

b) Montrons que la suite est décroissante, donc que pour tout n $x_{n+1} \leq x_n$. Procédons par réccurence.

Pour $n = 0$ montrons que $x_1 < x_0$. Or $x_0 = 5$ et $x_1 = \sqrt{5+2} = \sqrt{7} < 5$, donc $x_1 < x_0$.

Supponsons que $x_{n+1} \leq x_n$. Montrons que $x_{n+2} \leq x_{n+1}$. Par hypothèse

$$x_{n+1} \leq x_n$$

donc

$$x_{n+1} + 2 \leq x_n + 2$$

et comme la fonction racine carée est croissante

$$\sqrt{x_{n+1} + 2} \leq \sqrt{x_n + 2}$$

ce qui nous donne bien l'inégalité attendue.

$$x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

Donc pour tout n, $x_{n+1} \leq x_n$, ce qui démontre que la suite (x_n) est décroissante.

c). La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1. Donc elle converge (car toute suite décroissante minorée converge).

d) La suite (x_n) étant convergente, il existe ℓ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell$$

La fonction racine étant continue, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{x_n + 2} = \sqrt{\lim_{n \to +\infty} x_n + 2} = \sqrt{\ell + 2}$$

Enfin

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \ell$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{x_n + 2}$$

ℓ est donc solution de l'équation

$$\ell = \sqrt{\ell + 2}$$

Donc

$$\ell^2 - \ell - 2$$

Dont les racines évidentes sont -1 et 2. Les valeurs de la suite étant comprises entre 1 et 5, la limite doit être positive. On en conclut que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 2$$

3 Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \qquad u_0 = 2$$

1)

Instructions	U	K	N
Saisir N	$-$	$-$	3
$U \leftarrow 2$	2	$-$	3
Premiere iteration	2	0	3
$U \leftarrow \frac{2}{3} \times U + \frac{1}{3}K + 1$	$\frac{7}{3} \simeq 2,33$	0	3
Deuxieme iteration	$\frac{7}{3}$	1	3
$U \leftarrow \frac{2}{3} \times U + \frac{1}{3}K + 1$	$\frac{26}{9} \simeq 2,89$	1	3
Troisieme iteration	$\frac{26}{9}$	2	3
$U \leftarrow \frac{2}{3} \times U + \frac{1}{3}K + 1$	$\frac{97}{27} \simeq 3,59$	2	3
$Affichage\ N$	$\frac{97}{27}$	2	3

1b) L'affichage en sortie est $3,59$

2a) Montrons par réccurence que pour tout n entier naturel $u_n \leq n + 3$.

Pour $n = 0$ $u_0 = 2 \leq 0 + 3$, donc c'est bien vrai !

Supposons que $u_n \leq n + 3$. Montrons que $u_{n+1} \leq n + 1 + 3$ donc que $u_{n+1} \leq n + 4$. Par hypothèse

$$u_n < n + 3$$

$$\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} \times 3$$
$$\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$$
$$u_{n+1} \leq n + 3$$

et donc

$$u_{n+1} \leq n + 4$$

Donc nous pouvons conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq n + 3$$

2b)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

Conclusion

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

2c) Montrons que (u_n) est croissante. D'après la question 2b)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

et d'après la question 2a) $u_n \leq n + 3$ donc $n + 3 - u_n \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ce qui revient à dire que $u_{n+1} \geq u_n$. Le suite (u_n) est donc bien croissante.

3) La suite (v_n) est définie par :

$$v_n = u_n - n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3a) Montrons que (v_n) est géométrique.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n + 1) \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 \\ &= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n \\ &= \frac{2}{3}(u_n - n) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

3a) On a $v_0 = u_0 - 0 = 2$ donc

$$v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

On en déduit

$$u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

Conclusion

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

(v_n) est géométrique de raison $2/3$ donc a pour limite 0. On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n + \lim_{n\to+\infty} n = 0 + \infty$$

Conclusion

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

4) Pourt tout $n \geq 1$ on pose

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \qquad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

4a) Exprimons S_n en fonction de n

$$S_n = v_0 + 0 + v_1 + 1 + \cdots + v_n + n$$

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + 0 + 1 + 2 + \cdots + n$$

On reconnait, d'une part la somme des termes d'une suite géométrique et d'autre part, la somme des entiers de 0 à n (donc la somme des termes d'une suite arithmétique).

$$S_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

4b) Calculons la limite de T_n donc la limite de

$$T_n = \frac{6}{n^2}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Le premier terme de la somme a pour limite 0. Le deuxième 1/2

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}$$