TS4 Devoir Maison 2 Le 07/10/2016

Nom : .... à rendre le 17/10/2016

Exercice 1 Une urne contient au départ 3 boules blanches et 1 boule noire indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne :

- si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute 1 boule blanche supplémentaire.
- si elle est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires, où $n \in \mathbb{N}^*$. On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne. On note :

  A l'évènement : "on obtient une boule blanche au premier tirage".

  B l'évènement : "on obtient une boule blanche au second tirage".

1. Représenter les différentes situations à l'aide d'un arbre pondéré.

2.a) Déterminer les probabilités $P_A(B)$ et $P(A \cap B)$.

b) Montrer que
$$P(B) = \frac{12n + 63}{20(n+4)}.$$

c) Existe-t-il une valeur n pour laquelle les évènements A et B sont indépendants ?

3. On désigne par D l'évènement : "les deux boules sont de couleurs différentes".

a) Calculer $P_A(D)$.

b) Montrer que
$$P(D) = \frac{3n + 27}{20(n+4)}.$$

c) Existe-t-il une valeur de n pour laquelle les évènements A et D sont indépendants ?

Exercice 2 On considère plusieurs sacs de billes S_1, S_2, S_3, ... tels que le premier sac S_1 contient 3 billes noires et 4 billes blanches, et tous les autres sacs contiennent 3 billes noires et 3 billes blanches. On effectue des tirages aléatoires dans les différents sacs de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans S_1.
- on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2.
- on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3.
- etc

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement "la bille tirée dans le sac S_n est blanche".

1.a) À l'aide d'un arbre pondéré, donner les valeurs de $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P_{A_1}(A_2)$ et $P_{\bar{A_1}}(A_2)$.

b) Quel relation a-t-on entre ces quatre probabilités ?

c) En généralisant le résultat précédent, exprimer $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$.

2. On considère à présent la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{4}{7} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{7}u_n + \dfrac{3}{7} \end{cases}.$$

a) Démontrer que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on en déduire ?

3. Proposer un algorithme permettant de déterminer la plus petite valeur de n tel que $P(E_n) < 0{,}5001$.