Corrigé DM2 - TS4

10/09/2016

1 Exercice 1

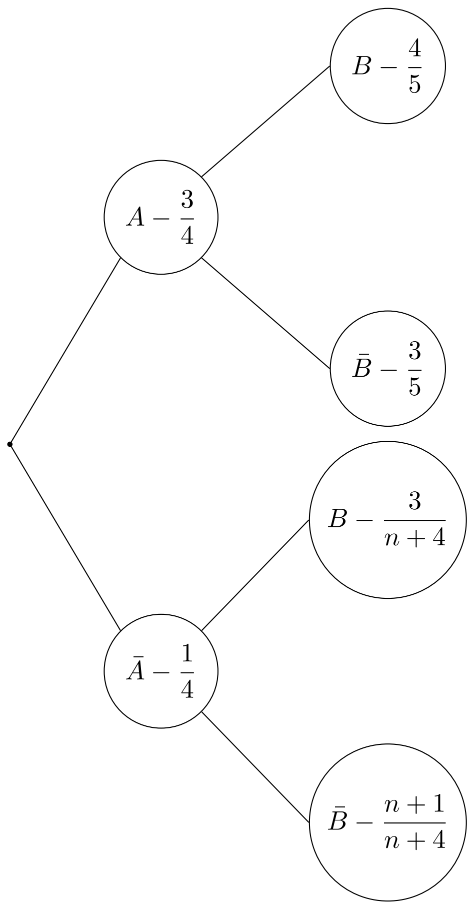
L'urne contient trois boules blanches et une boules noires, ce qui fait un total de 5 boules. Les boules sont indiscernables, il s'agit donc d'une situation d'équiprobabilité. On tire au hasard une boule de l'urne.

— Si la boule est blanche, on la remet et on ajoute une boule blanche supplémentaire. L'urne contient donc 4 boules blanches et une noire.

— Si la boule est noire, on la remet et on ajoute n boules noires. L'urne contient donc $n + 4$ boules, 3 blanches et $n + 1$ noires.

On tire ensuite une deuxième boule. L'expérience, c'est-à-dire les deux tirages successifs est représentée sur l'arbre ci dessous, en reprenant la dénomination des événement, A : « la première boule est blanche » et B : « la deuxième boule est blanche »

1)



2a) Calculons $p_A(B)$ et $p(A\cap B)$. A est l'événement tirer une boule blanche au premier tirage. Compte-tenu de l'équiprobabilité des boules

$$p(A)=\frac{3}{4}$$

B est l'événement tirer une boule blanche au deuxième tirage. Dans le cas ou le premier tirage est une boule blanche, l'urne contient 5 boules, 4 blanches et une noire. On en déduit

$$p_A(B)=\frac{4}{5}$$

Il vient

$$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$$
$$p(A\cap B)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$$

Conclusion

$$p(A)=\frac{3}{4}\qquad p_A(B)=\frac{4}{5}\qquad p(A\cap B)=\frac{3}{5}$$

2b) Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $p(B)$

$$p(B)=p(A\cap B)+p(\bar{A}\cap B)$$

Nous connaissons déjà $p(A\cap B)$. Il reste à déterminer $p(\bar{A}\cap B$. L'événement $\bar{A}$ correspond au tirage d'une boule noire au premier tirage, la probabilité est $1-p(A)$ donc

$$p(\bar{A})=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Si la première boule est noire, la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage est,

$$p_{\bar{A}}(B)=\frac{3}{n+4}$$

On en déduits $p(\bar{A}\cap B)$

$$p(\bar{A}\cap B)=p(\bar{A})\times p_{\bar{A}}(B)$$
$$p(\bar{A}\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{n+4}=\frac{3}{4(n+4)}$$

donc

$$p(B)=\frac{3}{5}+\frac{3}{4(n+4)}=\frac{3\times 4(n+4)+3\times 5}{20(n+4)}=\frac{12n+48+15}{20(n+4)}$$

Conclusion

$$p(B)=\frac{12n+63}{20(n+4)}$$

2c) Dire que les événements A et B sont indépendants revient à dire que

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

donc que

$$\frac{3}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{12n+63}{20(n+4)}$$

En divisantant par 3 de chaque coté puis en multiplant par 5 on obtient

$$1=\frac{12n+63}{16(n+4)}$$

soit

$$16n+64=12n+63$$

$$4n = -1 \qquad n = -\frac{1}{4}$$

Il n'y a pas de solution entière et positive

Conclusion : il n'existe pas de valeurs de n pour lesquels les événements A et B sont indépendants.

3) On désigne par D lévénement « les deux boules sont de couleur différentes », autrement dit on il y a deux cas de figure, tirer une première boule blanche puis une noire ou tirer une première boule noire puis une blanche.

3a) Le calcul de $p_A(D)$ est immédiat. On veut la probabilité d'avoir deux boules de couleurs différentes sachant que la première boule est blanche. La première boule étant blanche, l'urne contient 4 bboules blanches et 1 boule noire. La probabilité de tirer une boule noire au deuxième tirage est donc $\frac{1}{5}$.

$$p_A(D) = \frac{1}{5}$$

3b) On cherche $p(D)$. La formule des probabiltés totales nous donne

$$p(D) = p(A \cap D) + p(\bar{A} \cap D)$$
$$p(D) = p(A) \times p_A(D) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(D)$$

Nous ne connaissons pas encore $p_{\bar{A}}(D)$, c'est-à-dire la probabilité d'avoir deux boules de couleur différente sachant que la première n'est pas blanche. La première boule est noire, donc pour le deuxième tirage on a 3 boules blanches et $n+1$ boules noires, la probabilité de tirer une boule blanches est

$$p_{\bar{A}}(D) = \frac{3}{n+4}$$

Donc

$$\begin{aligned} p(D) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{n+4} \\ &= \frac{3}{20} + \frac{3}{4(n+4)} \\ &= \frac{3(n+4) + 3 \times 5}{20(n+4)} \\ &= \frac{3n + 12 + 15}{20(n+4)} \end{aligned}$$

Conclusion

$$p(D) = \frac{3n+27}{20(n+4)}$$

3b) Si A et D sont des événements indépendants alors

$$p(A \cap D) = p(A) \times p(D)$$

Or

$$p(A \cap D) = p(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

donc l'égalité devient

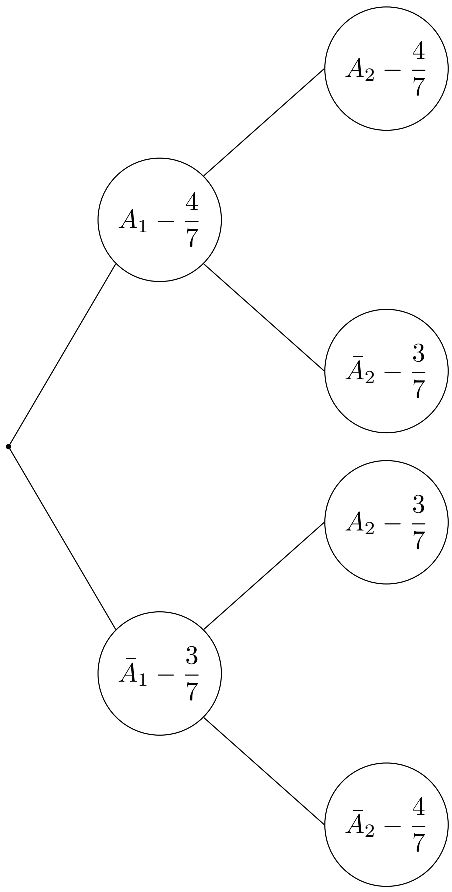
$$\frac{3}{20} = \frac{3}{4} \times \frac{3n+27}{20(n+4)}$$
$$\frac{1}{5} = \frac{3n+27}{20(n+4)}$$
$$5 \times (3n+27) = 20(n+4)$$
$$15n + 135 = 20n + 80$$
$$5n = 55$$
$$n = 11$$

Conclusion : pour $n = 11$ les événements A et D sont indépendants.

2 Exercice 2

On considère des sacs de billes S_1, S_2, S_3, $\cdots$. Le premier sac contient 3 billes noires et 4 blanches, les autres contiennent 3 billes noires et 3 blanches. On considère l'expérience suivante : on tire une bille du sac n et on note A_n l'événement la bille est blanche. La billet tiré est placée dans le sac suivant. Et on recommence. Il n'y a que pour le premier sac ou l'on effectue le tirage sans rien avoir ajouté.

1a) Représentons sur un arbre les deux premiers tirages



On en déduit donc

$$p(A_1) = \frac{4}{7} \qquad p_{A_1}(A_2) = \frac{4}{7} \qquad p_{\bar{A}_1}(A_2) = \frac{3}{7}$$

Le calcul de $p(A_2)$ est plus difficile. On utilise la formule des probabilité totale

$$p(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + p(\bar{A}_1 \cap A_2)$$

$$p(A_2) = P(A_1) \times p_{A_1}(A_2) + p(\bar{A}_1) \times p_{\bar{A}_1}(A_2)$$

$$A_2) = P(A_1) \times p_{A_1}(A_2) + (1 - p(A_1)) \times p_{\bar{A}_1}(A_2)$$

Numériquement cela donne

$$\begin{aligned} p(A_2) &= \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} + \left(1 - \frac{4}{7}\right) \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{16}{49} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{16}{49} + \frac{9}{49} \\ &= \frac{25}{49} \end{aligned}$$

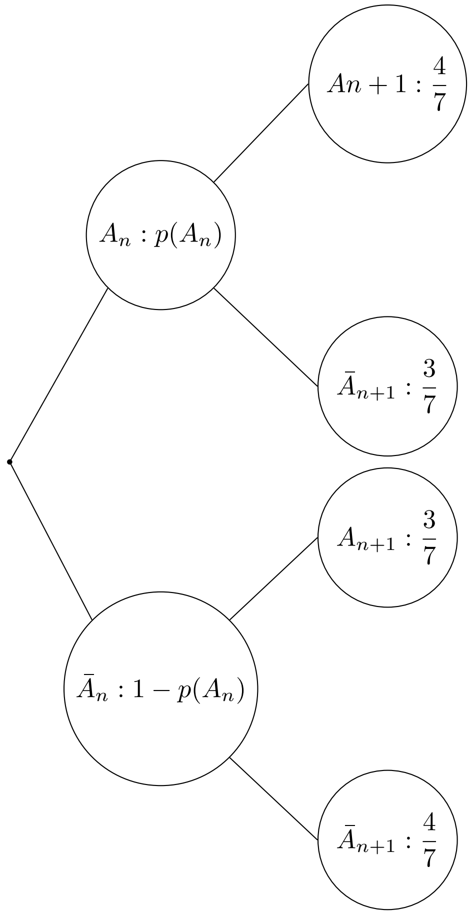
Conclusion

$$p(A_1) = \frac{4}{7} \qquad p(A_2) = \frac{25}{49} \qquad p_{A_1}(A_2) = \frac{4}{7} \qquad p_{\bar{A}_1}(A_2) = \frac{3}{7}$$

1b) On a la relation suivante entre $p(A_1)$, $p(A_2)$, $p_{A_1}(A_2)$ et $p_{\bar{A}_1}(A_2)$

$$p(A_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) + (1 - p(A_1)) \times p_{\bar{A}_1}(A_2)$$

1c) Représentons à nouveau la situation par un arbre, entre le tirage dans le sac n et le tirage dans le sac $n+1$.



On utilise à nouveau la formule des probabiltés totales pour calculer $p(A_{n+1})$

$$\begin{aligned} p(A_{n+1}) &= p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\bar{A}_n \cap A_{n+1}) \\ &= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + (1 - p(A_n)) \times p_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{4}{7} p(A_n) + \left(1 - \frac{4}{7}\right) \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{1}{7} p(A_n) + \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Conclusion

$$p(A_{n+1} = \frac{1}{7} p(A_n) + \frac{3}{7} \qquad p(A_1) = \frac{4}{7}$$

2) On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{4}{7} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{7}u_n + \dfrac{3}{7} \end{cases}$$

Voila qui est rassurant, puisque c'est la même relation de réccurence que nous avons trouvé entre $p(A_n)$ et $p(A_{n+1}$, on doit avoir bon !!

2a) Démontrons par réccurence que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.

Pour $n = 1$ c'est vrai, en effet

$$u_1 = \frac{4}{7} \qquad \frac{4}{7} > \frac{1}{2} \qquad u_1 > \frac{1}{2}$$

Supposons que $u_n > \frac{1}{2}$ montrons que $u_{n+1} > \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} u_n &> \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7}u_n &> \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7}u_n + \frac{3}{7} &> \frac{1}{14} + \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7}u_n + \frac{3}{7} &> \frac{1}{14} = \frac{6}{14} \\ u_{n+1} &> \frac{7}{14} \end{aligned}$$

Donc on a bien $u_{n+1} > \frac{1}{2}$ et nous pouvons conclure que pour tout n plus grand que 1 u_n est supérieur à 1/2.

Conclusion : la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$

2b) Montrons par réccurence que la suite (u_n) est décroissante. Calculons u_2

$$u_2 = \frac{1}{7}u_1 + \frac{3}{7} = \frac{1}{7}\frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{49} + \frac{21}{49} = \frac{25}{49}$$

$$u2 - u_1 = \frac{25}{49} - \frac{4}{7} = \frac{25}{49} - \frac{28}{49} = -\frac{3}{49} < 0$$

Donc $u2 < u_1$, la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons que $u_{n+1} < u_n$, montrons que $u_{n+2} < u_{n+1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &< u_n \\ \frac{1}{7}u_{n+1} &< \frac{1}{7}u_n \\ \frac{1}{7}u_{n+1} + \frac{3}{7} &< \frac{1}{7}u_n + \frac{3}{7} \\ u_{n+2} &< u_{n+1} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que pour tout $n \geq 1$ $u_{n+1} < u_n$ autrement dit la suite (u_n) est décroisssante.

2c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1/2. Or toute suite décroissante minorée converge, donc la suite (u_n) est convergente.

3) On souhaite déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n) < 1/2$. On a remarqué que

$$p(A_n) = u_n$$

Donc le problème revient à calculer les termes successifs de la suite (u_n) jusqu'à ce $u_n < 0,5001$, les termes successifs décroissent, on a peut etre une chance que u_n deviennent plus petit que $0,5001$ (En fait on n'a pas démontré que la limite est 1/2... passons ! Sous forme algorithmique cela va donner

$$
\begin{array}{l}
S \leftarrow 0,5001 \\
N \leftarrow 1 \\
U \leftarrow \dfrac{4}{7} \\
Tant\ que\ U > S\ Faire \\
\qquad U \leftarrow \dfrac{1}{7} \times U + \dfrac{3}{7} \\
\qquad N \leftarrow N + 1 \\
Fin\ Tant\ Que \\
Afficher\ N
\end{array}
$$

On trouve $n = 4$.