Corrigé DM2 - TS1

Mathématiques Spécialité

28/10/2016

1 Exercice 1 - 78 page 31

Trouver l'ensemble E des nombres tels que

$$n + 5 \equiv 3 \pmod 9$$

La congruence signifie que

$$n + 5 = 9k + 3 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Autrement dit

$$n = 9k - 2$$

Conclusion :

$$E = \{n; \quad n = 9k - 2 \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

2) Qu'elle est la plus petite valeur supérieure à 100 ?

$$\begin{aligned} n &\geq 100 \\ 9k - 2 &\geq 100 \\ 9k &\geq 102 \\ k &\geq \frac{102}{9} \end{aligned}$$

On trouve donc $k \geq 11,3$, mais k est un entier, donc la plus petite valeur de k qui convient est $k = 12$, ce qui donne $n = 106$.

2 Exercice 2

1) Après avoir remarqué que $2568 \equiv 8 \pmod{10}$, montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$

$$2568^{4n} \equiv 6 \pmod{10}$$

2) En déduire quel est le chiffre des unité de 2568^{12834}

1) Le dernier chiffre de 2568 est un 8, donc

$$\begin{aligned} 2568 &\equiv 8 \pmod{10} \\ 2568^4 &\equiv 8^4 \pmod{10} \\ 2568^4 &\equiv 4096 \pmod{10} \end{aligned}$$

mais

$$4096 \equiv 6 \pmod{10}$$

donc

$$2568^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

La propriété est donc vrai pour $n = 1$.

Supposons que $2568^{4n} \equiv 6 \pmod{10}$, montrons que $2568^{4(n+1)} \equiv 6 \pmod{10}$. Par hypothèse

$$2568^{4n} \equiv 6 \pmod{10}$$

et

$$2568^{4} \equiv 6 \pmod{10}$$

donc

$$\begin{aligned} 2568^{4n+4} &\equiv 36 \pmod{10} \\ 2568^{4(n+1)} &\equiv 6 \pmod{10} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc en conclure que pour tout $n \geq 1$

$$2568^{4n} \equiv 6 \pmod{10}$$

2) En déduire le chiffre des unités de 2568^{12834}

Effectuons la division euclidienne de 12834 par 4

$$12834 = 4 \times 3208 + 2$$

donc

$$2568^{12834} = 2568^{4\times 3208+2} = 2568^{4\times 3208} \times 2568^{2}$$

Or

$$\begin{aligned} 2568^{4\times 3208} &\equiv 6 \pmod{10} \\ 2568^{2} &\equiv 8^{2} \pmod{10} \\ 2568^{12834} &\equiv 6 \times 64 \pmod{10} \\ 2568^{12834} &\equiv 4 \pmod{10} \end{aligned}$$

Conclusion : le dernier chiffre de 2568^{12834} est un 4.

3 Exercice 3 - Clé de contrôle d'un numéro de sécurité sociale

Le numéro de sécurité sociale (ou numéro INSEE) d'une personne est un nombre de 15 chiffres décomposé en plusieurs parties : les 13 premiers chiffres forment un nombre N et les deux derniers chiffres forment une clé de contrôle K. La clé de contrôle est définie par $K = 97 - r$ où r est le reste de la division euclidienne de N par 97.
1) Montrer que $N \equiv 27a + b \pmod{97}$ et expliquer brièvement comment calculer la clé K avec un nombre plus raisonnable.
2) Henri a pour numéro de sécurité sociale $N = 1540454208091$

a Déterminer les entiers a et b

b Déterminer la clé de contrôle K pour ce numéro N

3) En donnant son numéro, Henri inverse souvent les deux derniers des 13 chiffres. Quelle est la clé de contrôle pour ce numéro erroné ?

Pourquoi 97 ? C'est parce que 97 est le plus grand nombre premier inférieur à 100 qu'il à été choisi pour calculer les clés de contrôle à deux chiffres. On pourra démontrer plus tard que de ce fait toute erreur concernant un seul chiffre est toujours détectée par la clé. En outre, si le plus grand nombre premier inférieur à 100 a été choisi, c'est pour offrir le plus grand nombre possible de clés à deux chiffres.

1) Montrons que $N \equiv 27a + b \pmod{97}$.

$$\begin{aligned} 100 &\equiv 3 \pmod{97} \\ 10^{6} &\equiv 3^{3} \pmod{97} \\ 10^{6} &\equiv 27 \pmod{97} \\ 10^{6}a &\equiv 27a \pmod{97} \\ 10^{6}a + b &\equiv 27a + b \pmod{97} \\ N &\equiv 27a + b \pmod{97} \end{aligned}$$

La division euclidienne de a et b par 97 donne

$$a = 97q_a + r_a \qquad \text{et} \qquad b = 97q_b + r_b$$

Donc

$$\begin{aligned} a &\equiv r_a \pmod{97} \\ b &\equiv r_b \pmod{97} \\ 27a + b &\equiv 27r_a + r_b \pmod{97} \\ N &\equiv 27r_a + r_b \pmod{97} \end{aligned}$$

Finalement

$$27r_a + r_b \equiv r \pmod{97}$$

La méthode est donc la suivante

1. Calculer r_a le reste de la division euclidienne de a par 97
2. Calculer r_b le reste de la division euclidienne de b par 97
3. Calculer $27r_a + r_b$
4. Calculer r le reste de la division euclidienne de $27r_a + r_b$ par 97
5. Calculer la clé $K = 97 - r$

2) Henri a pour numéro de sécurité sociale $N = 1540454208091$

2a) On a immédiatement

$$a = 1\ 540\ 454 \qquad \text{et} \qquad b = 208\ 091$$

2b) Pour le calcul de la clé nous procédons comme expliqué à la question précédente.

$$1\ 540\ 454 = 97 \times 15880 + 94 \qquad \text{et} \qquad 208\ 091 = 97 \times 2145 + 26$$

Les restes r_a et r_b sont respectivement 94 et 26. Calculons

$$27r_a + r_b = 27 \times 94 + 26 = 2564$$

La division euclidienne par 97 donne

$$2564 = 97 \times 26 + 42$$

Nous en déduisons $r = 42$ et finalement $K = 97 - 42 = 55$

La clé de controle est donc $K = 55$

3) Le nouveau numéro est $N = 1540454208019$

$$a = 1\ 540\ 454 \qquad \text{et} \qquad b = 208\ 019$$

r_a est inchangé, il faut recalculer r_b.

$$208\ 019 = 97 \times 2144 + 51$$

Les restes r_a et r_b sont respectivement 94 et 51. Calculons

$$27r_a + r_b = 27 \times 94 + 51 = 2589$$

La division euclidienne par 97 donne

$$2589 = 97 \times 26 + 67$$

Nous en déduisons $r = 67$ et finalement $K = 97 - 67 = 30$

La clé de controle est donc $K = 30$