Corrigé DM3 - TS2

22/10/2016

La fonction f est définie sur $D =]-2; 2[\cup]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 4}$$

1 Partie A - Etude d'une fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 12x - 32$$

1) Etudier la limite de g en $+\infty$.

La limite d'une fonction polynomiale est la limite de son terme de plus haut degré à savoir x^3, donc $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

2) Etudier le sens de variation de g et dresser le tableau de variation.

Le calcul de la dérivée est immédiat

$$g'(x) = 3x^2 - 12$$

Il s'agit d'un trinome du second degré dont les racines sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$. g' est donc négative sur l'intervalle $]-2; +2[$. D'ou le tableau de variations.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-16 -16	$\searrow$	-48 -48	$\nearrow$	$+\infty$

3) Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

La fonction g est continue (c'est une fonction polynome et de plus elle est dérivable). Sur l'intervalle $[2; +\infty[$ elle est strictement croissante.

$$g(4) = -16 \quad \text{et} \quad g(5) = 33$$

$0 \in [-16; 33]$ autrement dit, $0 \in [g(4); g(5)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ou plus précisément son corrolaire, le théorème de la bijection, il existe une unique valeur α appartenant à l'intervalle $[4; 5]$ telle que $g(\alpha) = 0$

Conclusion : Il existe une unique valeur de α telle que $g(\alpha) = 0$.

4) Compte tenu du choix judicieux des valeurs de a et b de x pour telles que $g(a)$ et $g(b)$ encadrent 0 nous savons déjà que α appartient à l'intervalle $[4; 5]$!

Conclusion : $4 < \alpha < 5$

5) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Un premier balayage entre 4 et 5 par pas de 0,1 donne $g(4,3) = -4,093$ et $g(4,4) = 0,384$ donc $4,3 < \alpha < 4,4$. Un deuxième balayage entre ces deux valeurs par pas de $0,01$ donne l'encadrement demandé.

$$4,39 < \alpha < 4,4$$

6a) L'algorithme permet de déterminer une valeur approchée à 0,1 près de la solution de l'équation

$$x^3 - 4x - 12 = 0$$

L'algorithme fonctionne par balayage à partir de 4 et par pas de 0,1. Il devrait afficher les valeurs $2,8$ et $2,9$ qui encadre la solution de l'équation. Malheureusement tel qu'il est écrit, l'algorithme ne fonctionne pas. En effet, pour $X = 4$, le calcul de Y donne 36 qui est déja positif, donc on ne rentre jamais dans la boucle WHILE et on affiche les valeurs $3,9$ et 4 qui sont erronées ! Pour que l'algorithme fonctionne, il faudrait modifier la valeur de départ et affecter par exemple 2 à X dans l'initialisation.

6b) L'algorithme modifié est le suivant :

$$\begin{array}{l}
X \leftarrow 4 \\
Y \leftarrow X^3 - 12 * X - 32 \\
Tant\ que\ Y < 0\ Faire \\
\quad X \ \leftarrow \ X + 0.01 \\
\quad Y \ \leftarrow \ X^3 - 12 * X - 32 \\
Fin\ Tant\ Que \\
Afficher\ X - 0.01\ et\ X
\end{array}$$

7) Etudier le signe de g

x	$-\infty$		-2		2		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-16 | -16	$\searrow$	-48 | -48	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion, pour $x < \alpha$ on a $g(x) < 0$ et pour $x \geq \alpha$ on a $g(x) \geq 0$.

2 Partie B - Etude de la fonction f

La courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction f dans un repère orthogonal (unité graphique : 1 cm en abscisse, 0,5 cm en ordonnées).

1a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

En plus l'infini, la limite de la fraction rationnelle f est la même que le quotient des termes de plus haut degré, c'est-à-dire $x^3/x^2 = x$. La limite est donc $+\infty$.

$x^2 - 4$ est négatif entre -2 et 2 et positif ailleurs. On en déduit :

$$\lim_{x \to -2^+} x^2 - 4 = 0^- \qquad \lim_{x \to 2^-} x^2 - 4 = 0^- \qquad \lim_{x \to 2^+} x^2 - 4 = 0^+$$

Nous en déduisons les limites de f. En -2, le numérateur prend la valeur 8. Et donc f tends vers $-\infty$. De même en 2, le numérateur prend la valeur 24, on en déduit que la limite est $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite de 2.

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$$

1b) Nous avons en -2 et en 2 des limites infinies. La courbe présente donc deux asymptotes verticales d'équation :

$$x = -2 \qquad \text{et} \qquad x = 2$$

2a) Montrer que, pour tout $x \in D$.

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2+8x)(x^2-4) - 2x(x^3+4x^2)}{(x^2-4)^2} \\
&= \frac{3x^4 - 12x^2 + 8x^3 - 32x - 2x^4 - 8x^3}{(x^2-4)^2} \\
&= \frac{x^4 - 12x^2 - 32x}{(x^2-4)^2} \\
&= \frac{x(x^3 - 12x - 32)}{(x^2-4)^2}
\end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-4)^2}$$

Problème d'énoncé ?

2b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Etudions le signe de la dérivée et pour cela commençons par un tableau de signe.

x	-2		0		2		α		$+\infty$
x	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

d'ou l'on déduit le tableau de variation. Il nous faut cependant calculer

$$f(0) = 0 \qquad f(\alpha) = 10,58$$

x	-2		0		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
			0		$\|\|$	$+\infty$	$\|$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	$\|$	$\nearrow$	
	$-\infty$		$\|$	$-\infty$	$\|\|$		$f(\alpha)$		

3) Déterminer une équation de la droite T, tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.

$$f(4) = \frac{4^3 + 4\times4^2}{4^2-4} = \frac{2\times4^3}{12} = \frac{32}{3}$$

$$f'(4) = \frac{4\times(4^3 - 12\times4 - 32)}{(4^2-4)^2} = -\frac{4}{9}$$

Léquation de la droite T est

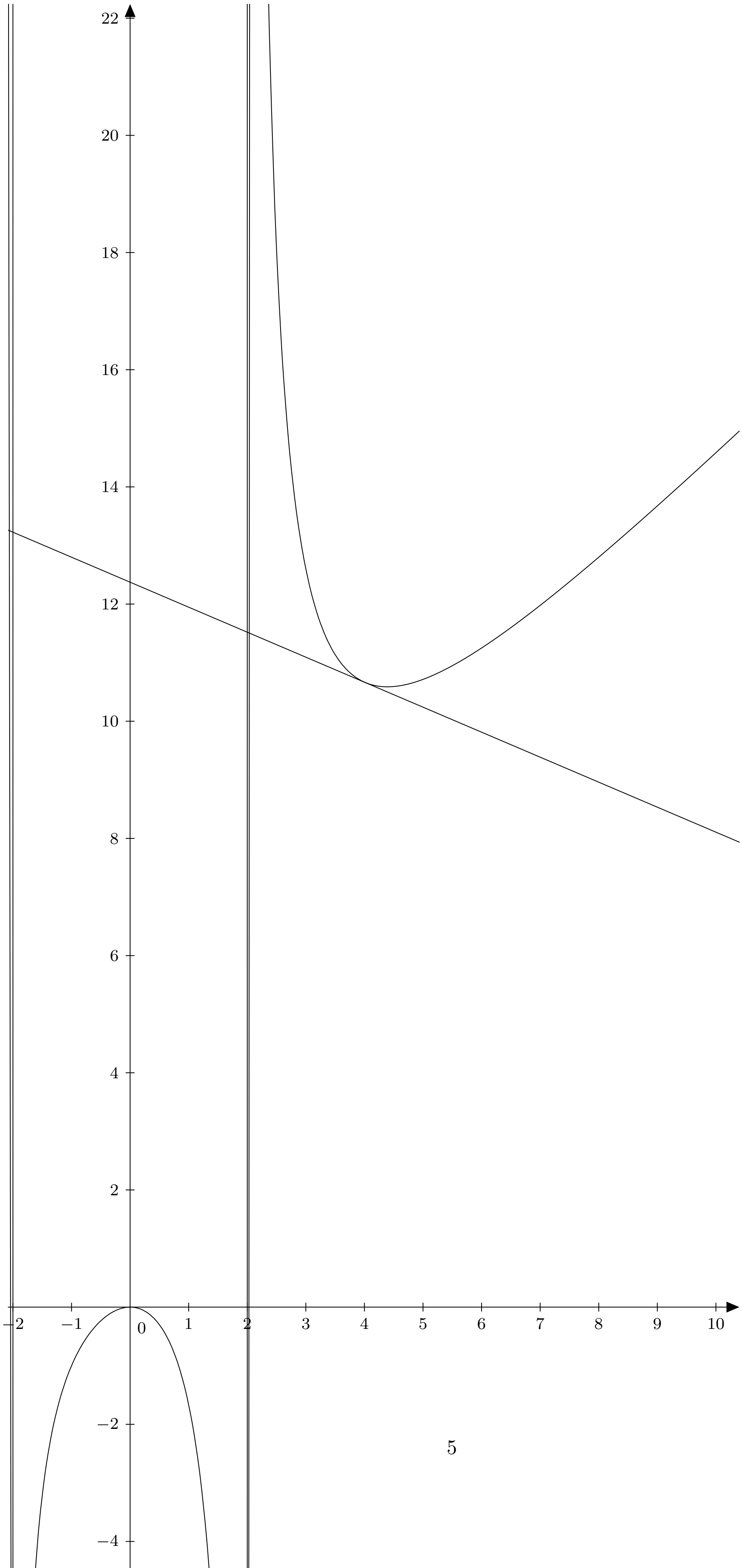
$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

$$y = -\frac{4}{9}x + 4\times\frac{4}{9} + \frac{32}{3}$$

Et finalement

$$y = -\frac{4}{9}x + \frac{112}{9}$$

4) Tracer la droite T, la courbe $\mathcal{C}$ et ses deux asymptotes.


22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
−2
−4
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10