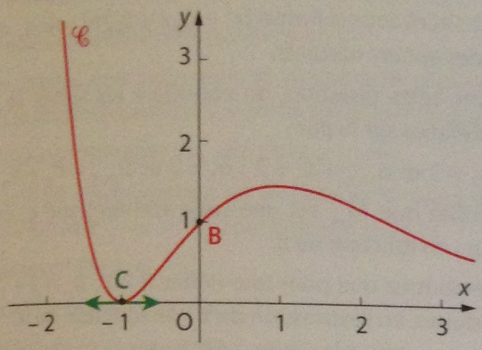
79 BAC

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^{-x}$ où a, b, c sont trois nombres.



On donne son tableau de variation incomplet.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		
$f(x)$		↘		↗ ↘	

1. a) À l'aide des renseignements portés sur la figure, déterminez les nombres a, b, c.

b) Complétez le tableau de variation en justifiant vos réponses.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T en B à $\mathscr{C}$.

a) Justifiez que le problème revient à déterminer le signe de $(x+1)\varphi(x)$ où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x+1)\,e^{-x} - 1$.

b) Étudiez le signe de $\varphi(x)$ et concluez.

80 BAC

A. f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Démontrez que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale dont on donnera une équation.

2. Étudiez les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Déterminez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1\,;2]$. On note u cette solution. Déterminez un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u.

B. n désigne un entier naturel non nul.
f_n est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}.$$

1. Dressez le tableau de variation de f_n.

2. a. Calculez $f_n(n)$. Quel est son signe ?

b) Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$e^{n+1} > 2n+1.$$

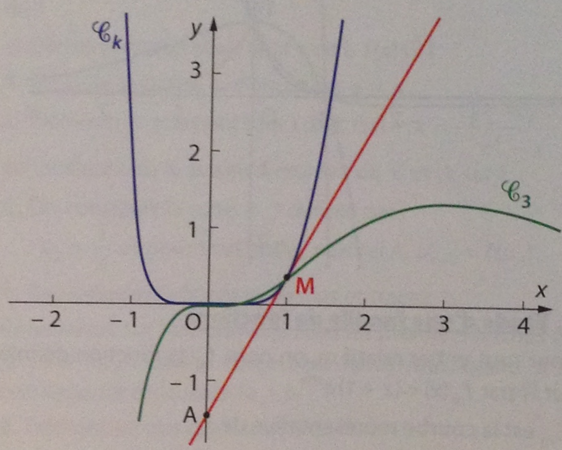
c) Démontrez que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[n\,;n+1]$. On note u_n cette solution.

3. Calculez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

81 BAC

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$. $\mathscr{C}_n$ est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé. Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_3$ ainsi qu'une courbe $\mathscr{C}_k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

La tangente T_k à $\mathscr{C}_k$ au point M d'abcisse 1 coupe l'axe des ordonnées en A de coordonnées $\left(0\,;-\dfrac{4}{e}\right)$.



1. a) Quelle est la limite de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$?

b) Étudiez les variations de f_1 et dressez son tableau de variation.

c) À l'aide de la représentation précédente, justifiez que k est un entier pair supérieur ou égal à 2.

2. a) Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par deux points fixes dont vous donnerez les coordonnées.

b) Vérifiez que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout nombre x,

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)\,e^{-x}.$$

3. Sur la figure, f_3 semble admettre un maximum pour $x = 3$. Validez cette conjecture par une démonstration.

4. a) Démontrez que la tangente T_k en M à la courbe $\mathscr{C}_k$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{2-k}{e}\right)$.

b) Déduisez-en la valeur de l'entier k.

c) Sur la figure, il semble que la fonction f_k soit strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$. Validez ou non ces conjectures.