Corrigé DM4 - TS2

26/11/2016

1 Exercice 1 - 79 page 103

On considère une fonction de la forme

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

1a) Déterminons a, b, c. Sur le graphique nous relevons les informations suivantes à partir des coordonnées des points B et C et de la tangente horizontale en C.

$$f(0) = 1 \qquad f(-1) = 0 \qquad f'(-1) = 0$$

Calculons la dérivée f'

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)e^{-x}(-1) \\ &= (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\iff (a \times 0^2 + b \times 0 + c)e^{-0} = 1 \\ f(-1) = 1 &\iff (a \times 1^2 + b \times 1 + c)e^{-(-1)} = 0 \\ f'(-1) = 0 &\iff (-a \times (-1)^2 + (2a - b) \times (-1) + b - c)e^{-(-1)} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le système

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & c & = 1 \\ a & - & b & + & c & = 0 \\ -3a & + & 2b & - & c & = 0 \end{array}$$

La résolution par subsitution est imméditate. La première équation nous donne $c = 1$. La deuxième donne $a = b - 1$ que nous reportons dans la troisième.

$$-3(b - 1) + 2b - 1 = 0 \Rightarrow b = 2$$

donc

$$a = 2 - 1 = 1$$

Conclusion

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 1 \qquad\qquad f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$$

1b) Conplétons le tableau de variations. Il nous faut les limites et la deuxième valeur ou la dérivée s'annulle pour le changement de variation.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Sous cette forme les limites à l'infini sont immédiates. La grande parenthèse à pour limite 1 en plus ou moins l'infini. Quant au quotient le cours nous dit

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

On en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Enfin

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) + \infty$$

Conclusion

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Pour les variations nous cherchons les points ou la dérivée s'annule.

$$f'(x) = (-x^2 + 1)e^{-x}$$

La dérivée est du signe de $1 - x^2$ et s'annule pour $x = -1$ (on le savait déjà) et pour $x = 1$. Elle est positive entre ces deux valeurs. Il nous reste à calculer $f(1)$

$$f(1) = (1^2 + 2 \times 1 + 1)e^{-1} = \frac{4}{e}$$

Nous pouvons compléter le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

2a) On souhaite étudier la position relative de la tangente au point B et de la courbe représentative de f. Commençons par calculer l'équation de la tangente au point B d'abscices 0.

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Nous avons

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = (-0^1 + 1)e^{-0} = 1$$

Conclusion : l'équation de la tangente est

$$y = x + 1$$

Pour étudier la position relative, nous calculons

$$\begin{aligned} f(x) - (x+1) &= (x^2 + 2x + 1)e^{-x} - (x+1) \\ &= (x+1)^2 e^{-x} - (x+1) \\ &= (x+1)\big((x+1)e^{-x} - 1\big) \end{aligned}$$

En conclusion

$$f(x) - (x+1) = (x+1)\varphi(x) \qquad \text{avec} \quad \varphi(x) = (x+1)e^{-x} - 1$$

2b) Pour connaitre les positions relatives, nous devons étudier le signe. La difficulté est dans l'étude du signe de φ. Le plus simple est d'étudier la fonction φ. Recherchons donc ses variations.

$$\varphi'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1)e^{-x} \times (-1) = -xe^{-x}$$

Donc

$$\varphi'(x) = -xe^{-x}$$

φ' est donc du signe de $-x$ et nous en déduisons les variations. Pour $x = 0$ nous avons

$$\varphi(0) = (0+1)e^{-0} - 1 = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc, pour tout x, $\varphi(x)$ est négative. Nous en déduisons le signe de $f(x)-(x+1)$

x	∞		-1		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	$\vert$	$+$	
$\varphi(x)$		$-$	$\vert$	$-$	
$f(x)-(x+1)$		$+$	$\vert$	$-$	

Par conséquent,

- pour $x \in]-\infty; -1[$ la courbe est au dessus de sa tangente
- pour $x \in]-1; +\infty[$ la courbe est au dessous de sa tangente

2 Exercice 2 - 81 page 103

Soit la fonction

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

1a) Etude des limites en plus et moins l'infini dans le cas $n = 1$

Etudions la limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

D'après le cours

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$

Etudions maintenant la limite en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$$

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$$

1b) Etudions les variations de f_1. Calculons donc la dérivée

$$f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + xe^{-x} \times (-1) = e^{-x}(1-x)$$

La dérivée est du signe de $1-x$. On en déduit le tableau de variation.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

1c) Sur $]-\infty;0]$ la fonction f_k est positive ce qui n'est le cas que pour les valeurs paires de k. k étant plus grand que 1 la plus petite valeur paire est 2.

2a) Montrons que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par deux points fixes.

Supposons qu'il existe des points fixes. Pour deux valeurs distinctes de n, n et n' avec $n < n'$ on a

$$f_n(x) = f_{n'}(x)$$

$$x^n e^{-x} = x^{n'} e^{-x}$$

donc

$$x^n - x^{n'} = 0$$

$$x^n(1 - x^{n'-n}) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Donc nécessairement

$$x = 0 \quad \text{ou} \qquad x = 1 \quad \text{ou} \qquad x = -1$$

On vérifie aisément que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad f_n(0) = 0 \qquad f_n(1) = \frac{1}{e}$$

En revanche, pour $x = -1$

$$f_{2k+1}(-1) \neq f_{2k}(-1)$$

La valeur des fonctions diffère selon la parité de n. Il y a bien deux points fixes dont les coordonnées sont :

$$O(0;0) \qquad M\left(1;\frac{1}{e}\right)$$

2b) Calculons la dérivée f_n

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} \times (-1) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$$

Conclusion

$$\forall n \geq 2 \qquad f_n'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$$

3) La fonction f_3 admet un maximum au point d'abscisse $x = 3$. En effet, $f_3'(x)$ s'annulle et change de signe pour $x = -3$.

$$f_3'(x) = x^2 e^{-x}(3-x)$$

Nous avons le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f_3'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_3(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{e^3}$	$\searrow$	

$$f_3(3) = 3^3 e^{-3} = \frac{27}{e^3}$$

La fonction a bien un maximum en $x = 3$ égal à $\dfrac{27}{e^3}$

4) Calculons l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 de la fonction f_k.

$$f_k(1) = \frac{1}{e} \qquad f_k'(1) = k1^{k-1}(k-1)e^{-1} = \frac{k-1}{e}$$

L'équation de la tangente est donnée par

$$y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$$

d'ou

$$y = \frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$$

Conclusion l'équation de la tangente est

$$y = \frac{k-1}{e}x + \frac{2-k}{e}$$

Elle coupe donc l'axe Oy en $y = \dfrac{2-k}{2}$ et donc les coordonnées du point d'intersection sont

$$\left(0; \frac{2-k}{e}\right)$$

4b) Le point A intersection de Oy et de $\mathcal{C}_k$ est $\left(0; -\frac{4}{e}\right)$, donc

$$\frac{2-k}{e} = -\frac{4}{e} \Rightarrow 2 - k = -4 \Rightarrow k = 6$$

Conclusion

$$k = 6$$

4c) La conjecture est bien évidement fausse. On peut s'en rendre compte de deux façons. Soit par un calcul de limite soit en étudiant les variations.

$$\lim_{x \to +\infty} x^k e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$$

C'est toujours l'exponentielle qui gagne !

On peut également reprendre les variations de f_k. Pour k impair.

x	$-\infty$		0		k		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Pour k pair nous aurions les variations suivantes

x	$-\infty$		0		k		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Dans les deux cas, la fonction redevient décroissante et ne monte pas à l'infini. La conjecture est fausse. Ceci étant comment peut-on émettre une conjecture sur le comportement d'une fonction à l'infini alors qu'on ne voit la représentation graphique que pour les valeurs de x comprises en -2 et 2...