Exercice - M0001C

1) La construction de la suite se fait en traçant la droite d'équation $y = x$. A partir de u_n sur l'abscisse, on calcul $u_{n+1} = f(u_n)$. La valeur obtenue de l'image sur l'axe des ordonnées est ramenée sur l'axe des abscisses grace à la droite d'équation $y = x$. Le calcul des premières valeurs de la suite donne :

$$u_0 = 5 \quad u_1 = \frac{19}{7} \quad u_2 = \frac{23}{11}$$

2) Montrons par réccurrence que pour tout n entier naturel $u_n - 1 > 0$.

Pour $n = 0$, la propriété est vérifiée. En effet $u_0 - 1 = 5 - 1 = 4$.

Supposons $u_n - 1 > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 \\ &= \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} \\ &= \frac{3u_n - 3}{u_n + 2} \\ &= \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

Compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, le numérateur et le dénominateur sont positifs et donc $u_{n+1} - 1 > 0$.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n - 1 > 0$$

3) Recherchons le sens de variation de la suite (u_n). Calculons $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} \\ &= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} \\ &= -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2} \end{aligned}$$

Compte tenu de $u_n - 1 > 0$, le dénominateur est positif. Le numérateur l'est également puisque c'est un carré. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n < 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est décroissante.

4) La suite (u_n) est décroissante, minorée par 1. Elle est donc convergente. Sa limite ℓ est solution de l'équation

$$\ell = \frac{4\ell - 1}{\ell + 2}$$

$$\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$$

Conclusion : La suite (u_n) converge 1.

5) Montrons que la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

est arithmétique. Pour cela, calculons $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\
&= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\
&= \frac{1}{\frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}} - \frac{1}{u_n - 1} \\
&= \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{1}{u_n - 1} \\
&= \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{3}{3(u_n - 1)} \\
&= \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Conclusion : la suite (v_n) est une suite arithmétique.

6) Nous déduisons immédiatement une expression de v_n. En effet, le premier terme et la raison de la suite sont :

$$R = v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3} \qquad v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}n$$

Or

$$v_n(u_n - 1) = 1 \Rightarrow v_n u_n = v_n + 1 \Rightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{v_n}$$

et donc

$$u_n = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}n + 1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}n}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{15 + 4n}{3 + 4n}$$

On a évidement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{15 + 4n}{3 + 4n} = 1$$