Exercice - M0002C

1) Etudions la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ pour tout entier naturel n. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par une relation de récurrence. Cherchons donc une relation de réccurence pour la suite (w_n)

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\
&= \frac{u_n + v_n\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{u_n + v_n}{2} \\
&= \frac{2u_n + 2\sqrt{2}v_n - (1+\sqrt{2})(u_n + v_n)}{2(1+\sqrt{2})} \\
&= \frac{2u_n + 2\sqrt{2}v_n - u_n - v_n - \sqrt{2}u_n - \sqrt{2}v_n}{2(1+\sqrt{2})} \\
&= \frac{(1-\sqrt{2})u_n + (\sqrt{2}-1)v_n}{2(1+\sqrt{2})} \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}(v_n - u_n) \\
&= \frac{(\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}(v_n - u_n) \\
&= \frac{-(\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 1)}{2(1^2 - \sqrt{2}^2)}(v_n - u_n) \\
&= \frac{2\sqrt{2}-3}{-2}(v_n - u_n) \\
&= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)(v_n - u_n)
\end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison q et de premier terme w_0 avec

$$q = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \qquad w_0 = \sqrt{2} - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_{n+1} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) w_n$$

La raison étant plus petite que 1 et positive et w_0 étant positif on en déduit que tous les termes de la suite sont positifs et que la limite est 0.

2) Montrons que pour tout n entier naturel $u_n \leq v_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n - u_n = w_n = (\sqrt{2}-1)\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^n$$

$$w_n \geq 0 \Rightarrow v_n - u_n \geq 0 \Rightarrow v_n \geq u_n$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq v_n$$

3) Etudions les variations des suites (u_n) et (v_n).

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\
&= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} \\
&= \frac{v_n - u_n}{2} \\
&= \frac{w_n}{2}
\end{aligned}$$

w_n étant positif pour tout n, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \geq u_n$$

La suite (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + v_n\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - v_n \\ &= \frac{u_n + v_n\sqrt{2} - v_n - \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{u_n - v_n}{1+\sqrt{2}} \\ &= -\frac{w_n}{1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

w_n étant positif pour tout n, on en déduit que $v_{n+1} - v_n \leq 0$, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} \leq v_n$$

La suite (v_n) est décroissante.

4) Nous avons les inégalités suivantes

1. $u_0 \leq u_n$ car la suite (u_n) est croissante.
2. $u_n \leq v_n$ inégalité démontrée à la question 2).
3. $v_n \leq v_0$ car la suite (v_n) est décroissante.

En résumé

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

(u_n) est donc une suite croissante majorée par v_0, donc (u_n) converge (car toute suite croissante majorée converge). De même, (v_n) est une suite décroissante minorée par u_0, donc (v_n) converge (car toute suite décroissante minorée converge). Soit ℓ la limite de (u_n) et ℓ' la limite de (v_n). Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = v_n - u_n$$

donc, toutes les suites étant convergente

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} v_n - \lim_{n\to\infty} u_n$$

$$0 = \ell' - \ell$$

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.

5) Déterminons la limite commune des suites (u_n) et (v_n). Nous avons

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \qquad w_n = v_n - u_n$$

donc

$$u_n = \frac{u_{n-1} + w_{n-1} + u_{n-1}}{2}$$

$$u_n = u_{n-1} + \frac{w_(n-1}{2}$$

ou encore

$$u_n - u_{n-1} = \frac{w_{n-1}}{2}$$

On a donc une suite télescopique

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_k}{2}$$

Ce qui conduit à

$$u_n = u_0 + \frac{1}{2}w_0\frac{1-q^n}{1-q} \qquad q = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

En passant à la limite nous avons

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\frac{1}{1-\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)}$$

$$\ell = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}-1+\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-1}$$

$$\ell = \frac{(3\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)} = \frac{12+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2}{(2\sqrt{2})^2-1^2}$$

Conclusion

$$\ell = \frac{10-\sqrt{2}}{7}$$