Partie A

1) Nous avons $g(x) = x^3 - 1200x - 100$. Calculons la dérivée de la fonction g.

$$g'(x) = 3x^2 - 1200$$

2) Afin d'étudier les variations de g on étudie le signe de la dérivée g'. g' un une fonction polynome du second degré dont le coefficient de x^2 (ici 3) est positif. g' sera donc négative entre les racines. Le calcul des racines est imméditat :

$$g'(x) = 0 \iff 3x^2 - 1200 = 0 \iff x^2 = \frac{1200}{3}$$

Les racines de l'équation sont donc :

$$x_1 = -20 \quad \text{ou} \quad x_2 = 20$$

donc on a

$$g'(x) \leq 0 \qquad \forall x \in [-20; 20]$$

Et, en se limitant à l'intervalle $[1; 100]$ nous obtenons

$$g'(x) \leq 0 \qquad \forall x \in [20; 100]$$

Nous en déduisons le tableau de variation de g.

$$\begin{aligned}
g(1) &= 1^3 - 1200 \times 1 - 100 = -1299 \\
g(20) &= 20^3 - 1200 \times 20 - 100 = 8\ 000 - 24\ 000 - 100 = -16\ 100 \\
g(100) &= 100^3 - 1200 \times 100 - 100 = 1\ 000\ 000 - 120\ 000 - 100 = 879\ 900
\end{aligned}$$

x	1		20		100
$g'(x)$		$-$	|	$+$	
$g(x)$	-1299	$\searrow$	$-16\ 100$	$\nearrow$	$879\ 900$

3 Nous avons les propriétés suivantes :

- g est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction polynome. (On peut également justifier la continuité en disant que g est dérivable donc g est continue). g est donc continue sur l'intervalle $[20; 40]$.
- g est strictement croissante sur $[20; 100$ donc également sur l'intervalle $[20; 40]$.
- $g(20) = -16\ 100$ et $g(40) = 15\ 900$ donc $0 \in [g(20); g(40)]$.

D'après le corrolaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou de la bijection), il existe une unique valeur $\alpha \in [20; 40]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

4) A la calculatrice on trouve

$$34,6 \leq \alpha \leq 34,7$$

Conclusion : arrondi à l'unité près, on a

$$\alpha = 35$$

On en déduit le signe de g. g étant croissante, nous avons :

$$\forall x \leq \alpha \implies g(x) \leq g(\alpha) \implies g(x) \leq 0$$

$$\forall x \geq \alpha \implies g(x) \geq g(\alpha) \implies g(x) \leq 0$$

x	1		α		100
$g(x)$		$-$	|	$+$	

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[1;100]$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}$$

1) Calculons la fonction dérivée de f

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1200 \times x^2 - (1200x + 50) \times 2x}{x^4} \\ &= 1 + \frac{-1200x^2 - 100x}{x^4} \\ &= 1 + \frac{-1200x - 100}{x^3} \\ &= \frac{x^3 - 1200x^2 - 100x}{x^3} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1200x^2 - 100x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

2) L'étude du signe f' est immédiate. x est positif, donc x^3 l'est également. f' est donc du signe de g.

3) Nous en déduisons le tableau de variation de f

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + 50 + \frac{1200 \times 1 + 50}{1^2} = 1301 \\ f(35) &= 35 + 50 + \frac{1200 \times 35 + 50}{35^2} = \frac{5847}{49} \simeq 119 \\ f(100) &= 100 + 50 + \frac{1200 \times 100 + 50}{100^2} = \frac{32\ 401}{200} \simeq 162 \end{aligned}$$

x	1		α		100
$f'(x)$		$-$	|	$+$	
$f(x)$	1301	$\searrow$	119	$\nearrow$	162

4) La coube représentative est donnée en dernière page

5) La résolution (graphiquement ou à l'aide de la calculatrice de l'équation $f(x) = 130$ donne deux solutions

$$x_1 = 20 \qquad x_2 = 60$$

Partie C

1) Le coût moyen est défini par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} \qquad \text{avec} \quad C(x) = x^2 + 50x + 1200 + \frac{50}{x}$$

donc

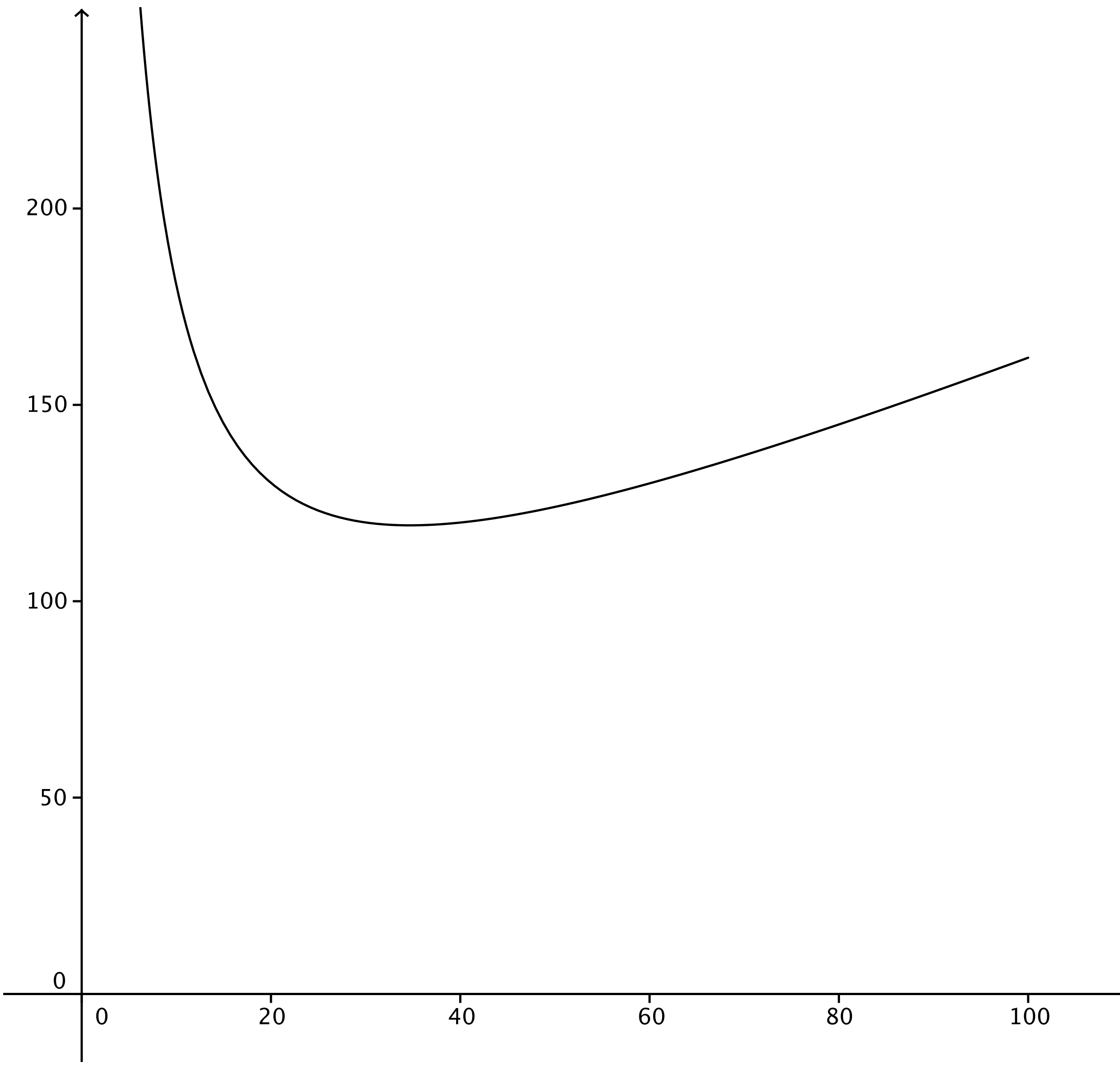
$$C_M(x) = f(x)$$

Le cout moyen minimun correspond donc au minimum de f, obtenu pour $x = 34,6$.

Conclusion : La quantité de tee-shirt à produire pour avoir un cout moyen minimu est 3 460.

2) Le cout minimum correspondant est $C_M(\alpha) = f(\alpha) \simeq 119$ millier d'euro

Conclusion : le cout minimum est de 119 000€.


200
150
100
50
0
0
20
40
60
80
100