Exercice - M0010C

Montrer que toute fonction réelle, d'une variable réelle peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Raisonnons par analyse et synthèse. Soit f une fonction d'une variable réelle. Supposons qu'une telle décomposition existe. Il existe alors deux fonctions p et i respectivement paire et impaire telles que

$$\forall x \in D_f \qquad f(x) = p(x) + i(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

Résolvons le système

$$\begin{cases} p(x) + i(x) = f(x) \\ p(x) - i(x) = f(-x) \end{cases}$$

En additionnant membre à menbre on obtient immédiatement

$$2p(x) = f(x) + f(-x)$$

D'ou

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Si les fonctions p et i existent ca ne peut être que celle-ci. Or nous avons

$$p(x) + i(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = p(x)$$

$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x)$$

En résumé, les fonctions

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Vérifient les propriété suivantes

- $f(x) = p(x) + i(x)$
- $p(-x) = p(x)$ p est une fonction paire.
- $i(-x) = -i(x)$. i est une fonction impaire.

Conclusion : toute fonction d'une variable réelle peut se décomposer comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.