

Exercice - M0013C

On recherche sous forme rationnelle, la limite de la suite définie par

$$v_0 = 1,2 \quad v_1 = 1,27 \quad v_2 = 1,277 \quad v_3 = 1,2777 \quad \text{etc}$$

Remarquons que le nombre

$$\ell = 1,2777 \dots$$

a une suite infinie de chiffre après la virgule et que cette suite de chiffre est périodique (puisque composée uniquement de 7. Il s'agit donc d'un nombre rationnel. Ecrivons le n^{eme} terme de la suite

$$\begin{aligned} v_n &= 1,2 \underbrace{777 \dots 7}_{n \text{ fois}} \\ &= 1,2 + 0,07 + 0,007 + \dots + \frac{7}{10^{n+1}} \\ &= \frac{12}{10} + \frac{7}{100} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

On reconnait dans la parenthèse la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1/10$ et de premier terme 1. Donc

$$v_n = \frac{12}{10} + \frac{7}{100} \left(\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \right)$$

En arrangeant un peu l'expression, il vient

$$v_n = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

La limite de la suite (v_n) est immédiate (limite de q^n avec $q < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{108 + 7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$$

Conclusion : La limite de la suite (v_n) est un rationne et est égale à $\frac{23}{18}$

La suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$$

est une suite arithmético géométrique de la forme $u_{n+1} = au_n + b$. L'étude général de ce type de suite, nous enseigne qu'il y a convergence lorsque $a < 1$. La suite converge donc. La limite est le point fixe de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$$

La résolution de l'équation

$$f(x) = x$$

Donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{23}{27} &= x \\ \frac{2}{3}x &= \frac{23}{27} \\ x &= \frac{23}{27} \cdot \frac{3}{2} \\ x &= \frac{23}{18} \end{aligned}$$

Conclusion : les suite (u_n) et (v_n) ont la même limite à savoir $\frac{23}{18}$