Exercice - M0016C

$ABCD$ est un parallèlogramme. Soit I et J tels que

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

1a) Montrons que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD}$. En utilisant la relation de Chasle, nous avons :

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI} \qquad (1)$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme, donc

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

et

$$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$$

En reportant dans l'égalité (1), il vient

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

Conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD}}$$

1b) Montrons que $\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{BD}$. Nous avons en utilisant la relation de Chasles

$$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BJ}$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme, donc

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$$

et par définition

$$\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

donc

$$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{BD}$$

Conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{BD}}$$

2) Nous avons

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{BD}$$

donc

$$\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{CI}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires et donc les points C, I et J sont alignés.

Conclusion : $\boxed{\text{Les points } C, I \text{ et } J \text{ sont alignés.}}$