Exercice - M0017C

Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à partir de son troisième mois de d'existence ?

On peut tenter répondre à la question, en créant un arbre ou chaque étage représente la population de lapin le n^{ieme} mois. Mais on se rend rapidement compte que le nombre de lapin augmente rapidement. Il faut donc trouver une approche plus abstraite !

- Le premier mois, il y a un couple de lapins
- Le deuxième mois, il y a toujours un couple de lapins (les lapins sont trop jeunes pour avoir procréé
- Le troisième mois ; il y a notre couple de lapins et sa progeniture donc un autre couple de lapins, soit 2 couples.

Connaissant le nombre de lapins un mois, comment calculer le nombre de lapins le mois suivant ? Le problème est que la population de lapinx le mois n est composée de lapins en age de se reproduire et de lapins trop jeunes pour se reproduire. Une chose est certaine. La population du mois suivant est égale à la population du mois en cours, puisque personne ne meurt, plus les naissances. Or le mois suivant, le nombre de naissance sera égale au nombre de couples en age de se reproduire. Et tous les lapins du mois précédent seront en age se reproduire, puisqu'il seront forcément au moins dans leur troisième mois d'existence.

On peut donc modéliser la situation par une suite (F_n) dont la valeur représente le nombre de couples de lapins le mois n. Si l'on traduit en terme de suite l'analyse précédente on obtient :

- Nombre de couple de lapins initial : $F_1 = 1$ (nombre de lapin le premier mois)
- Nombre de couple de lapins le deuxième mois : $F_2 = 1$
- Si F_n est la population le mois n, le mois suivant, la population sera F_{n+1} et on a vu que

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

L'étude de la population de lapins revient donc à l'étude de la suite réccurente

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0 \quad F_1 = 1$$

C'est la célèbre suite de Fibonacci ! La suite du texte propose une étude de cette suite et va jusqu'à l'établissement de la formule explicite de F_n.

Les premiers termes de la suite sont :

$$F_0 = 1 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 2 \quad F_3 = 3 \quad F_4 = 5 \quad F_5 = 8$$

Pour tout n, $F_n \geq n$. En effet, $F_0 \geq 0$ et $F_1 \geq 1$.Supposons que $F_k \geq k$ pour tout $k \geq k \leq n$. Montrons que $F_{n+1} \geq n+1$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$
$$F_{n+1} \geq n + n - 1 = 2n - 1$$

Dès que n est plus grand que 2, $2n - 1 \geq n$. La propriété est donc démontrée, pour tout n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n \geq n$$

On en déduit immédiatement que la suite (F_n) diverge vers l'infini.

La suite vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 - (-1)^n$$

La démonstration se fait par récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité est bien vérifiée

$$F_0 F_2 = 1 \times 2 = 2 \qquad F_1^2 + (-1)^0 = 1^2 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2$$

Suppons que $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$ et montrons que $F_{n+1} n F_{n+3} = F_{n+2}^2 + (-1)^{n+1}$

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n+3} &= F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) \\
&= F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 \\
&= F_{n+1}F_{n+2} + F_n F_{n+2} - (-1)^n \\
&= F_{n+2}(F_{n+1} + F_n) + (-1)^{n+1} \\
&= F_{n+2}F_{n+2} + (-1)^{n+1} \\
&= F_{n+2}^2 + (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

On a donc bien l'hérédité et donc la propriété est démontrée !

On étudie maintenant la suite (Q_n) définie par

$$Q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Tentons d'étudier les variations de (Q_n)

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} - Q_n &= \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} \\
&= \frac{F_n F_{n+2} - F_{n+1}F_{n+1}}{F_n F_{n+1}} \\
&= \frac{F_{n+1}^2 + (-1)^n - F_{n+1}^2}{F_n F_{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}
\end{aligned}$$

Donc

$$Q_{n+1} - Q_n = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}$$

La différence de deux termes consécutifs est alternativement positive est négative. La suite (Q_n) n'est pas monotone. On va donc analyser séparément le comportement de termes pairs et des termes impairs. Posons : $u_n = Q_{2n}$ et $v_n = Q_{2n+1}$. Etudions les variations de (u_n).

$$u_{n+1} - u_n = Q_{2n+2} - Q_{2n}$$

Or

$$\begin{aligned}
Q_{n+2} - Q_n &= Q_{n+2} - Q_{n+1} + Q_{n+1} - Q_n \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{F_{n+1}F_{n+2}} + \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}F_n + (-1)^n F_{n+2}}{F_n F_{n+1} F_{n+2}} \\
&= \frac{(-1)^n(-F_n + F_{n+2})}{F_n F_{n+1} F_{n+2}} \\
&= \frac{(-1)^n F_{n+1}}{F_n F_{n+1} F_{n+2}} \\
&= \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1} F_{n+2}}
\end{aligned}$$

Donc

$$Q_{n+2} - Q_n = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+2}}$$

On en déduit

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^{2n}}{F_{2n}F_{2n+2}}$$

quantié manifestment positive, donc la suite (u_n) est croissante. Etudions de même les variations de (v_n).

$$v_{n+1} - v_n = Q_{2n+3} - Q_{2n+1} = \frac{(-1)2n+1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}$$

quantité manifestment négative, donc la suite (v_n) est décroissante. Enfin, comparons u_n et v_n

$$v_n - u_n = Q_{2n+1} - Q_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{F_{2n}F_{2n+1}}$$

On en déduit que pour tout n $u_n \leq v_n$. Compte-tenu des variations des suites (u_n) et (v_n)

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

Nous pouvons maitenant établir la convergences des différentes suites. En effet, (u_n) est une suite croissante, majorée (par v_0), elle est donc convergente. Soit u sa limite. De même, (v_n) est une suite décroissante minorée (par u_0), elle est donc convergente. Soit v sa limite. Nous avons mentionné au début que la limite de (F_n) est plus l'infini, donc on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = v - u = 0$$

Les suite (u_n) et (v_n) on même limite que nous noterons ϕ.

Il reste à montre la convergence de (Q_n). La suite extraite des termes de rang pairs et la suite extraite des termes de rang impairs convergent toutes les deux vers la même limite ϕ, donc (Q_n) doit converger vers ϕ. Montrons plus précisément, c'est-à-dire, montrons que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n > n_0 \Rightarrow |Q_n - \phi| < \epsilon$$

ce qui est autre que la définition de la convergence d'une suite. Soit donc un *epsilon* > 0, (u_n) converge vers ϕ donc il existe un rang n_u à partir duquel, on a

$$\forall n > n_u \qquad |u_n - \phi| < \epsilon$$

de même (v_n) converge vers ϕ donc, il exite un rang n_v à partir duquel on

$$\forall n > n_v \qquad |v_n - \phi| < \epsilon$$

Si n est pair. $Q_n = u_{\frac{n}{2}}$, donc dès que $n > 2n_u$, on a $n/2 > n_u$ et donc

$$|u_{\frac{n}{2}} - \phi| = |Q_n - \phi| < \epsilon$$

Si n est impair, $Q_n = v_{\frac{n-1}{2}}$, donc dès que $n > 2nv$

$$|v_{\frac{n-1}{2}} - \phi| = |Q_n - \phi| < \epsilon$$

En résumé dès que $n > 2n_u$ et $n > 2n_v$ on $|Q_n - \phi| < \epsilon$, donc pour $\epsilon > 0$, il existe bien un rang n_0 (il suffit de prendre $n_0 = \max(2n_u, 2n_v)$ tel que pour tout $n > n_0$ $|Q_n - \phi| < \epsilon$. La suite (Q_n) converge donc vers ϕ.

Il reste à calculer la valeur de la limite.

$$Q_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{Q_n}$$

Puisque (Q_n) converge, en passant à la limite, on obtient

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

et donc

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Equation du second degré dont les racines sont :

$$\phi_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \phi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Les termes de la suite (Q_n) étant positif, la limite est également positivie et l'on en conclu

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Les élèves de Terminale s'arrêtent la. Pour les prépa voici quelques compléments. La suite vérifie la relation de réccurence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

L'ensemble des suites est un espace vectoriel. On démontre que l'ensemble des suites vérifiant la relation précédente est un sous espace vectoriel que l'on notera $\mathcal{F}$. C'est immédiat compte-tenu de la linéarité de l'expression de récurrence. On remarque qu'il existe des suites de la forme x^n vérifiant la relation de réccurence. En effet, si une telle suite éxiste, cela signifie que

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$$

x est donc solution de l'équation (appelée équation caractéristique)

$$x^2 2 - x - 1 = 0$$

Les solutions sont

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On vérifie aisément que les suites ϕ^n et ϕ'^n conviennent. Elles forment une famille libre. La aussi c'est immédiat. Considérons une combinaison linéaire de ces deux suites.

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda\phi^n + \mu\phi'^n = 0$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$ on obtient

$$\left\{ \begin{array}{cccl} \lambda & + & \mu & = 0 \\ \phi\lambda & + & \phi'\mu & = 0 \end{array} \right.$$

Système dont la résolution est immédiate et donne $\lambda = \mu = 0$. La famille est donc libre. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u_n) & \longrightarrow & (u_0, u_1) \end{array}$$

C'est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^2$, la vérification se fait sans difficultés. Donc $\mathcal{F}$ est de dimension 2. Donc la famille $((\phi^n), (\phi'^n))$ est une base de $\mathcal{F}$. Autrement dit, notre suite (F_n) s'écrit comme combinaison linéaire de ces deux suites

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad F_n = \lambda\phi^n + \mu\phi'^n$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$ ça nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{cccl} \lambda & + & \mu & = 0 \\ \phi\lambda & + & \phi'\mu & = 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{r} \mu = -\lambda \\ (\phi - \phi')\lambda = 1 \end{array} \right.$$

Donc

$$\lambda = \frac{1}{\phi - \phi'} \qquad \mu = \frac{-1}{\phi - \phi'}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n = \frac{1}{\phi - \phi'}\phi^n + \frac{-1}{\phi - \phi'}\phi'^n$$

En arrangeant un peu on trouve

$$F_n = \frac{1}{\phi - \phi'}(\phi^n - \phi'^n)$$

Comme $\phi - \phi' = \sqrt{5}$ on trouve finalement

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Remarque : La formule explicite donnant les termes de la suite est appelée formule de Binet.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi'^n) \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \phi' = -\frac{1}{\phi}$$