**Exercice - M0032C**

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, on considère les points $A(5;3)$, $B(2;0)$ et $C(-1;4)$.

**1)** Déterminons les coordonnées des points $D$ et $E$ définis par :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$$

Déterminons les coordonnées du point $D$. Calculons les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - Y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-5 \\ 0-3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\times(-3) \\ \frac{2}{3}\times(-3) \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nous avons également

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} \implies x_D - x_A = -2 \qquad y_D - y_A = -2$$

d'ou

$$x_D = -2 + 5 = 3 \qquad y_D = -2 + 3 = 1$$

Conclusion : les coordonnées du point $D$ sont $(3;1)$

Déterminons les coordonnées du point $E$. Calculons les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - Y_C \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ 3-4 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EA}$

$$\overrightarrow{EA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} \implies \overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\times 6 \\ \frac{2}{3}\times(-1) \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Nous avons également

$$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} x_A - x_E \\ y_A - y_E \end{pmatrix} \implies x_A - x_E = 4 \qquad y_A - y_E = -\frac{2}{3}$$

d'ou

$$x_E = 5 - 4 = 1 \qquad y_E = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

Conclusion : les coordonnées du point $E$ sont $\left(1;\frac{11}{3}\right)$

**2)** Démontrons que les droites $(DE)$ et $(BC)$ sont parallèles.

Une première méthode est de calculer les coordonnées des vecteurs et de vérifier la colinéarité

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-2\\4-0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1-3\\\dfrac{11}{3}-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-2\\\dfrac{8}{3}\end{pmatrix}$$

En écrivant le critère de colinéarité, il vient

$$-3\times\frac{8}{3}-4\times(-2)=-8+8=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } (BC) \text{ et } (DE) \text{ sont donc parallèles.}}$

Une deuxième méthode consiste à rechercher un réel $\lambda$ tel que

$$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{DE} \implies -2\lambda=-3 \quad \text{et} \quad \frac{8}{3}\lambda=4 \implies \lambda=\frac{3}{2}$$

Donc

$$\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$$

Il y a bien colinéarité.

Troisième méthode, toujours en utilisant les coordonnées, mais cette fois dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
On a les coordonnées suivantes pour les points

$$A(0;0) \quad B(1;0) \qquad C(0;1) \qquad D\left(\frac{2}{3};0\right) \qquad E\left(0;-\frac{2}{3}\right)$$

et pour les vecteurs

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad\qquad \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{3}\\\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$$

On retrouve bien

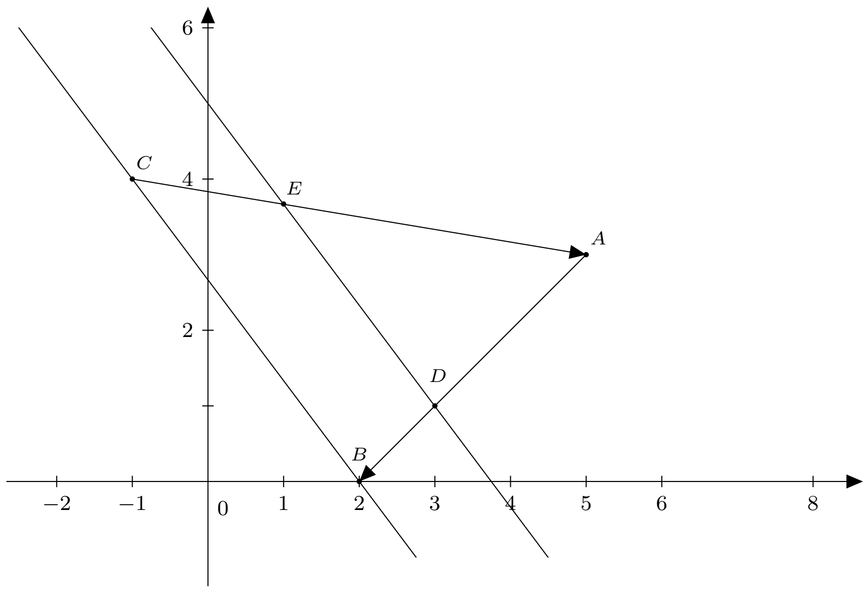
$$\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Enfin, dernière méthode, et sans doute la meilleure si l'exercice ne guide pas vers une autre façon de faire...

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

Et finalement

$$\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$


6
4
2
C
E
A
D
B
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
8