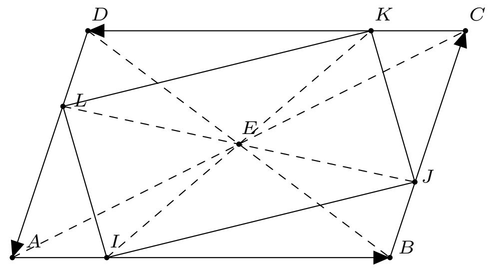
Exercice - M0033C

1) $ABCD$ est un parallélogramme. On définit les points I, J, K et L par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

Représentons la situation sur une figure.



2) On considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$. Donnons les coordonnées des points. $ABCD$ étant un parallélogramme, nous avons évidement les égalités vectorielles

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \qquad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

- Point A : c'est l'origine du repère donc $A(0; 0)$.
- Point B : $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$ donc $B(1; 0)$.
- Point C : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD}$ donc $C(1; 1)$.
- Point D : $\overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD}$ donc $D(0; 1)$.
- Point I : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$ donc $I\left(\frac{1}{4}; 0\right)$
- Point J :
$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$$
donc $J\left(1; \frac{1}{3}\right)$.
- Point K :
$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{CD}$$
donc $K(\left(\frac{3}{4}; 1\right)$
- Point L :
$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$$
donc $L\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Conclusion :

$$A(0; 0) \quad B(1; 0) \quad C(1; 1) \quad D(0; 1) \quad I\left(\frac{1}{4}; 0\right) \quad J\left(1; \frac{1}{3}\right) \quad K\left(\frac{3}{4}; 1\right) \quad L\left(0; \frac{2}{3}\right)$$

3) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$.

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} x_L - x_K \\ y_L - y_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Conclusion : les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

4) D'après le calcul des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$, nous avons

$$\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{KL}$$

donc

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$$

C'est la caractérisation vectorielle d'un parallélogramme.

Conclusion : le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

5 E est le centre du parallélogramme $ABCD$. Calculons ses coordonnées. E est le milieu des diagonales, donc le mileu des segements $[AC]$ et $[BD]$. Donc

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_E = \frac{y_A + y_C}{2}$$

Conclusion : le point point E a pour coordonnées $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

6) Montrons que les points I, E et K sont alignés. Une première méthode est de s'aider de la figure. E est le centre du parallélogramme $ABCD$, mais semble bien être également celui de $IJKL$. Donc nous pouvons tester si E est le milieux de I et de K.

$$\frac{x_I + x_K}{2} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{y_I + y_K}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

E est donc bien le milieu du segment $[IK]$, ce qui nous assure de l'alignement des points I, E et K.

Alternativement nous pouvons rechercher une relation de colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IK}$

$$\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}-0\end{pmatrix} \implies \overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \implies$$

de même

$$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\\1-0\end{pmatrix} \implies \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} \implies$$

On a donc

$$\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{IE}$$

Ou encore en utilisant le critère de colinéarité nous donne

$$\frac{1}{4} \times 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires et donc les points I, E et K sont alignés.