

Exercice - M0041C

Posons

$$u(t) = \frac{1}{N(t)} \iff N(t) = \frac{1}{u(t)}$$

Il vient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = \alpha \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \alpha \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}$$

$$-u' = \alpha u - 1$$

$$u' = 1 - \alpha u$$

$$u' = -\alpha \left(u - \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$\frac{u'}{\left(u - \frac{1}{\alpha} \right)} = -\alpha$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \left(u - \frac{1}{\alpha} \right) \right) = -\alpha$$

En intégrant

$$\ln \left(u - \frac{1}{\alpha} \right) = -\alpha t + K$$

$$u(t) - \frac{1}{\alpha} = e^{-\alpha t + K} = e^K e^{-\alpha t} = C e^{-\alpha t}$$

Et finalement

$$u(t) = C e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}$$

On détermine C en utilisant la population initiale de canards égale à 2α .

$$N(0) = 2\alpha \iff u(0) = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\frac{1}{2\alpha} = C + \frac{1}{\alpha} \implies C = -\frac{1}{2\alpha}$$

Il vient finalement

$$N(t) = \frac{1}{-\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}}$$

et

$$N(t) = \frac{2\alpha}{2 - e^{-\alpha t}}$$

On détermine aisément la limite de $N(t)$ quand t tend vers l'infini.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \alpha$$

Conclusion : l'évolution temporelle du nombre de canards est :

$$N(t) = \frac{2\alpha}{2 - e^{-\alpha t}}$$

Au bout d'un temps infini, la population de canard tend vers α