

**Exercice - M0042**

Pour tout entier  $n \geq 1$  on pose :

$$u_n = \underbrace{111 \cdots 111}_{n \text{ chiffres}}$$

Par exemple :  $u_3 = 111 = \text{cent onze}$ .

Soit  $a$  un chiffre autre que zéro. On pose :

$$S_n(a) = a + aa + aaa + \cdots + \underbrace{aaa \cdots aaa}_{n \text{ chiffres}}$$

Par exemple :  $S_3(9) = 9 + 99 + 999 = 1107$

1. Décomposer  $u_n$  en somme de puissances de 10 ; puis calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. En déduire une expression de  $S_n(1)$  en fonction de  $n$  ; puis une expression de  $S_n(a)$  en fonction de  $n$  et  $a$ .
3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :

$$T_n = S_n(1) + S_n(2) + \cdots + S_n(9)$$

Calculer  $T_n$  en fonction de  $S_n(1)$ , puis en fonction de  $n$ .