

Exercice - M0042C

1) u_n s'écrit :

$$u_n = 1 + 10 + 100 + \dots + 10^{n-1}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique. Donc

$$u_n = \frac{1 - 10^n}{1 - 10} = \frac{10^n - 1}{9}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{10^n - 1}{9}$$

2) Exprimons $S_n(1)$.

$$S_n(1) = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 111}_{n \text{ chiffres}}$$

Mais on a également

$$S_n(1) = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

En utilisant le résultat de la première question, il vient

$$\begin{aligned} S_n(1) &= \sum_{i=1}^n \frac{10^i - 1}{9} \\ &= \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^n 10^i - \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(10 \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n \right) \\ &= \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$S_n(1) = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}$$

3) On pose

$$T_n = S_n(1) + S_n(2) + \dots + S_n(9)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} S_n(a) &= a + aa + aaa + \dots + \underbrace{aaa \dots aaa}_{n \text{ chiffres}} \\ &= a(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 111}_{n \text{ chiffres}}) \\ &= aS(1) \end{aligned}$$

On en déduit donc immédiatement l'expression de T_n

$$T_n = (1 + 2 + \dots + 9)S(1)$$

Or la somme des entiers de 1 à n s'exprime aisément. C'est la somme des termes d'une suite arithmétique

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc

$$1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

Donc

$$T_n = 45 \times \left(\frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81} \right)$$

Conclusion :

$$T_n = \frac{5}{9} (10^{n+1} - 10 - 9n)$$