Exercice - M0059C

Etudions la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$.

1)Le dénominateur ne s'annule pas, le domaine de définition est donc $\mathbb{R}$. Conclusion

$$D_f = \mathbb{R}$$

La fonction est manifestement impaire, la courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère, et le domaine d'étude peut être réduit à $\mathbb{R}^+$.

2) Etudions les limites aux bornes du domaine de définition, c'est-à-dire en $-\infty$ et $+\infty$. Nous avons

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+1} = frac5xx^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{x}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

Or

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

et donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

L'axe Ox est donc asymptote horizontale à la courbe représentative de f. La courbe est manifestement en dessous de l'asymptote en moins l'infini (car f est négative) et au dessus en plus l'infini.

3) Etudions les variations. Le calcul de la dérivée est immédiat

$$f'(x) = \frac{5(x^2+1)-5x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Conclusion

$$f'(x) = \frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x)$ est du signe de $1-x^2$, trinome du second degré dont les racines sont -1 et 1 et dont le coefficient du terme carré est négatif. Nous en déduisons immédiatement le signe de $f'(x)$ positif entre les racines et négatif ailleurs. Nous en déduisons le tableau de variation.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0

4) Recherchons d'énventuelles points d'inflexion. Calculons la dérivée seconde.

$$f'(x) = \frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Donc

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-10x(1+x^2)^2 - 5(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-10x(1+x^2) - 20x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{10x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Conclusion

$$f''(x) = \frac{10x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

La dérivée seconde s'annule et changent de signe pour $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$. Calculons $f\left(\sqrt{3}\right)$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{5\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3}{9} + 1} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

Conclusion : la courbe présente trois points d'inflexion

$$I_0(0,0) \qquad I_-\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right) - \qquad I_+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

Calculons l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $\sqrt{3}$, c'est-à-dire en I_+.

$$y = f'(\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + f(\sqrt{3})$$

$$f'(\sqrt{3}) = \frac{5(1 - \sqrt{3}^2)}{(1 + \sqrt{3}^2)^2} = \frac{5 \times (-2)}{(1+3)^2} = \frac{-10}{16} = -\frac{5}{8}$$

Ainsi

$$y = -\frac{5}{8}(x - \sqrt{3}) + \frac{5\sqrt{3}}{4} = -\frac{5}{8}x + \frac{5\sqrt{3}}{8} + \frac{10\sqrt{3}}{8}$$

Conclusion : l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\sqrt{3}$ est :

$$y = -\frac{5}{8}x + \frac{15\sqrt{3}}{8}$$

5) Traçons la courbe représentative. Pour cela calculons l'image de quelques points :

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = \frac{5 \times 1}{1^2 + 1} = \frac{5}{2}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

$$f(3) = \frac{5 \times 3}{3^1 + 1} = \frac{15}{10} = \frac{5}{2}$$

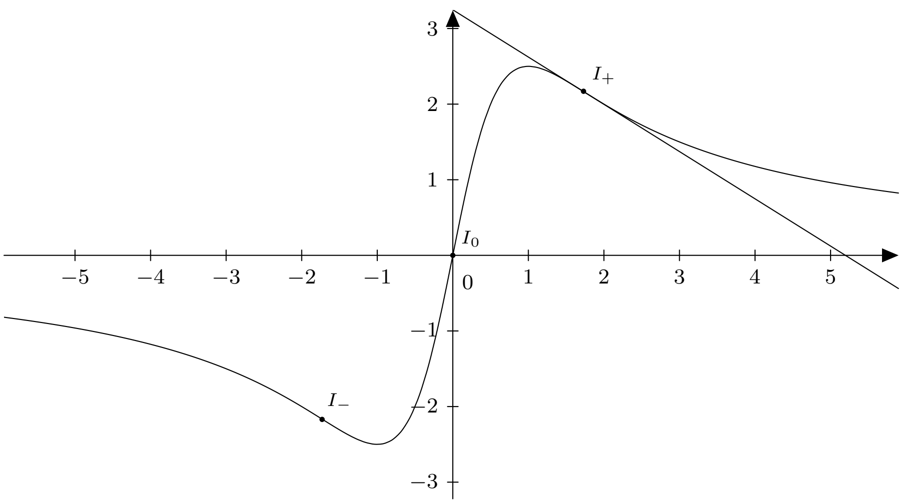

Figure 1 – Courbe représentative de f