Exercice - M0061C

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \frac{|x-1|}{x}$. Etudions cette fonction.

1) f est définie sur $\mathbb{R}^\star$

Plus précisément, en tenant compte du signe de $x-1$ et en supprimant la valeur absolue, il vient

$$x > 1 \qquad f(x) = 1 + \frac{x-1}{x} = 1 + 1 - \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x}$$

et

$$x < 1 \text{ et } x \neq 0 \qquad f(x) = 1 + \frac{-(x-1)}{x} = 1 - 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} f(x) = 2 - \dfrac{1}{x} & x > 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{x} & x \leq 1 \end{cases}$$

2) Etudions les limites au bornes du domaine. Elles se déduisent des limites de la fonction inverse.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

Nous en déduisons l'existence :

1. d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$
2. d'une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées)
3. d'une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$

3) De même les variations se déduisent de celle de la fonction inverse

x	$-\infty$		0			1		
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$ 1	$\|$	1 $\nearrow$	2

4) Etude de la continuité et de la dérivabilité

f est continue et dérivable sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, comme somme d'une fonction constante et de la fonction inverse. Nous avons notamment pour la fonction dérivée f'

$$x < 1 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad x > 1 \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

L'etude du signe est immédiate et l'on retrouve les variations données précédement. Examinons ce qui se passe en 1.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 - \frac{1}{x} = 1$$

Donc $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. f est continue en 1.

Examinons maintenant la déivabilité en 1.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2 - \frac{1}{x} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

f n'est donc pas dérivable en 1. La coube présente un point anguleux avec de demi-tangente de pente 1 et -1.

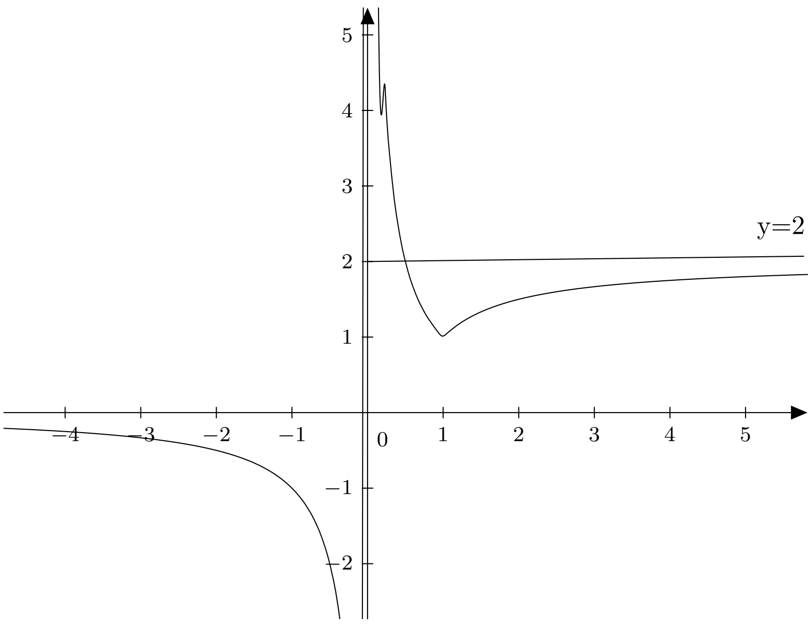

FIGURE 1 – Courbe representative de f