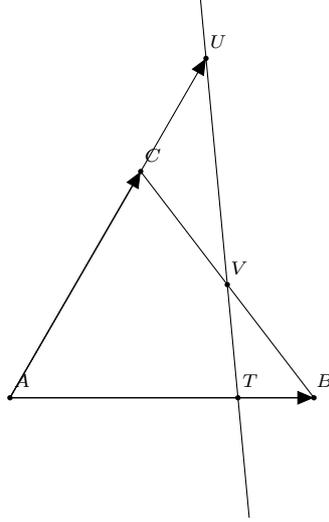


Exercice - M0079C

Représentons la situation sur une figure. Ce n'est pas indispensable, mais ça aide...



Méthode 1

$$\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BV} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AU} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CU} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

Nous avons donc

$$\overrightarrow{TU} = 3\overrightarrow{TV}$$

Conclusion : les vecteurs \overrightarrow{TU} et \overrightarrow{TV} sont colinéaires. Les points T, U et V sont alignés.

Méthode 2

Utilisons les coordonnées des vecteurs dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad U \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad V \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Justifions rapidement ces coordonnées

- A est l'origine du repère
- $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$
- V est le milieu de $[BC]$, donc les coordonnées de V sont la demi-somme des coordonnées de B et C . (formule des coordonnées du milieu).
- $\overrightarrow{CU} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AU}$ et donc $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Finalement $\overrightarrow{AU} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$.

On en déduit, les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{TU} et \overrightarrow{TV}

$$\overrightarrow{TU} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{TV} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il y a proportionnalité des coordonnées et donc

$$\overrightarrow{TU} = 3\overrightarrow{TV}$$

Sinon, on peut utiliser le critère de colinéarité.

$$\left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0$$

Conclusion : les vecteurs \overrightarrow{TU} et \overrightarrow{TV} sont colinéaires. Les points T, U et V sont alignés.