Exercice - M0105C

1) Combien avons nous de grands parents ? 4 (deux grands-pères et deux grands-mères).

2) Combien avons nous d'arrières grands parents. Nos deux parents ont chacun 4 grands-parents, qui sont nos arrières grands-parents, nous avons donc 8 arrières grands parents. Raisonnons de même pour les arrières arrières grands parent. Chacun de nos parents à 8 arrières grands-parents, qui sont nos arrières arrières grands-parents soit 16 arrières arrières grands-parents.

3) Nous avons donc d'après les questions précéndentes et l'énoncé

$$u_1 = 2 \qquad u_2 = 4 \qquad u_3 = 8 \qquad u_4 = 16$$

En effet, u_1, u_2, u_3 et u_4 correspondent respectivement au nombre de parents, grands-parents, arrières grands-parents et arrières arrières grands-parents.

4) Connaissant u_n le nombre d'ancêtre à la n$^{\text{eme}}$ génération, il est aisé de calculer u_{n+1} le nombre d'ancêtre à la $(n+1)^{\text{eme}}$ génération. En effet, chaque membre de la nn$^{\text{eme}}$ a deux parents et donc la (n+1)$^{\text{eme}}$ sera deux fois plus nombreuses. Autrement dit

$$u_{n+1} = 2u_n$$

5) (u_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et donc

$$u_n = u_1 \times 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

Conclusion : pour tout $n \geq 1$

$$u_1 = 2^n$$

7) Combien l'arbre génálogique contient-il de membre ? Notons S_n le nombre total de membres jusqu'à la génération n.

$$S_3 = 1 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$
$$S_4 = 1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

Au bout de n génération

$$S_n = 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$$

On reconait la somme des q^n... et donc

$$S_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$

Conclusion : A la n^{eme} génération, le nombre de membres de l'arbre généalogique est

$$S_n = 2^{n+1} - 1$$