Exercice - M0106C

Une balle en caoutchouc est lachée d'une hauteur de 100 cm au-dessus du sol. Elle rebondit plusieurs fois et perd de l'énergie à chaque rebond. La hauteur atteinte est égale aux $\dfrac{9}{10}$ de la hauteur du précédent rebond.
On désigne par u_n la hauteur en centimètre du n^{eme} rebond et par $u_0 = 100$ la hauteur d'ou elle est lâchée.

1) Calculons la hauteur des premiers rebonds

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{9}{10} \times 100 = 90 \\ u_2 &= \frac{9}{10} \times 90 = 81 \\ u_3 &= \frac{9}{10} \times 81 = \frac{729}{10} = 72,9 \end{aligned}$$

Conclusion

$$u_0 = 100 \qquad u_1 = 90 \qquad u_2 = 81 \qquad u_3 = 72,9$$

2) Connaissant la hauteur du rebond n, on calcul la hauteur du rebond $n+1$ comme précédement. On a immédiatement

$$u_{n+1} = \frac{9}{10} u_n$$

On reconnait la formule de réccurence d'une suite géométrique de raison $\frac{9}{10}$. On a donc

$$u_n = u_0 q^n = 100 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

Conclusion : pour tout n entier naturel

$$u_n = 100 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

3) Nous obtenons la hauteur du dixième rebond en calculant u_{10}.

$$u_{10} = 100 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$$

Nous obtenons

$$u_{10} \simeq 34,67$$

4) La balles est considérée comme immobile lorsque la hauteur du rebond est inférieure à 1 cm, ce qui se traduit par la condition

$$u_n \leq 1$$

Il vient alors

$$100 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n \leq 1$$

En prenant le logarithme de chaque coté,

$$\ln\left(100 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n\right) \leq 0$$

$$\ln(100) + n \ln\left(\frac{9}{10}\right) \leq 0$$

$$n \ln\left(\frac{9}{10}\right) \leq -\ln(100)$$

$$n \geq \frac{-\ln(100)}{ln\left(\frac{9}{10}\right)}$$

$$n \geq \frac{\ln(100)}{\ln(10)-\ln(9)}$$

Nous trouvons

$$n \geq 43,7$$

Autrement dit, la balle sera considérée comme immobile au 44$^{\text{eme}}$ rebonds !

Calculons la distance totale L_n parcourue par la balle après n rebonds.

$$L_n = u_0 + 2u_1 + 2u_2 + \cdots 2u_n$$

Elle tombe de sa hauteur initiale, puis fait un aller retour de hauteur u_1, puis un de hauteur u_2 etc...

$$L_n = u_0 + 2(u_1 + \cdots + u_n)$$

On reconnait la somme des termes d'une suite géometrique de u_1 à u_n.

$$L_n = u_0 + 2u_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

Soit numériquement

$$L_n = 100 + 2\frac{9}{10} \times 100\frac{1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^n}{1-\dfrac{9}{10}}$$

$$L_n = 100 + 2\frac{9}{10} \times 100\frac{1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^n}{\dfrac{1}{10}}$$

$$L_n = 100 + 2\frac{9}{10} \times 100\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) \times 10$$

$$L_n = 100 + 1800\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

La distance parcourue jusquá immobilisation de la balle est L_{44}

$$L_{44} = 100 + 1800\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{44}\right) = 1882,5$$

Conclusion : la balle a parcouru environ 18m80...