Exercice - M0110C

Soit A et B deux événements d'un univers Ω. Donc nous avons

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \qquad P(B) = P_A(B) \qquad P(A) = P_B(A)$$

1) Montrons que si A et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$ le sont aussi.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P_A(\bar{B}) = P(A)(1 - P_A(B)) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \times P(\bar{B})$$

A et $\bar{B}$ sont donc indépendants.

On démontre de même que $\bar{A}$ et B sont indépendants (A et B jouent un rôle symétrique. D'après ce que nous venons de démontre nous avons A et B indépendants entraine A et $\bar{B}$ indépendants puis $\bar{A}$ sont indépendants

2) A et B sont indépendants donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Par ailleurs

$$A \subset B \implies P(A. \cap B) = P(B) = P(A) \times p(B)$$

Donc

$$P(B)(1 - P(A) = 0 \implies P(A) = 0 \text{ ou } P(B) = 1$$

3) Montrons que si A est indépenant de lui même alors $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. A est indépendant de lui-même, donc

$$P(A \cap A) = P(A) \times P(A) \implies P(A) = P(A)^2 \implies P(A)(1 - P(A)) = 0 \implies P(A) = 0 \text{ ou } P(A) = 1$$

4) $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. Montrons que pour tout événement B, A et B sont indépendants, c'est-à-dire.

$$\forall B \in \Omega \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Si $P(A) = 0$ alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0$$

et

$$P(A) \times P(B) = 0$$

et donc il y a bien indépdence.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Si $P(A) = 1$ alors $P_B(A) = 1$ et donc

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(B) \times P(A)$$

de nouveau A et B sont bien indépendants.