

Exercice - M0111

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

1. Calculer les limites de f aux bornes du domaine.
2. Etablir le tableau de variation de f .
3. Montrer que pour tout $n > 2$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; e]$
4. Soit (α_n) la suite définie par : « pour tout $n > 2$, α_n est la solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ dans l'intervalle $[1; e]$ ». Justifier l'existence de cette suite.
5. Montrer que la suite (α_n) converge et donner sa limite.
6. De la même façon montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[e; +\infty[$.
7. Soit β_n la suite définie par : « pour tout n , β_n est la solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ dans l'intervalle $[e; +\infty[$ ». Etudier la suite (β_n) .