**Exercice - M0111C**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

**1)** Etudions les limites aux bornes du domaine de définition.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

En plus l'infini, il s'agit d'une limite connue du cours

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Conclusion

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

**2)** Etudions les variations de $f$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

La dérivée est donc du signe de $1-\ln x$

$$1-\ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e$$

Nous avons alors

$$f(e) = \frac{1}{e}$$

Nous en déduisons le tableau de variation

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $\frac{1}{e}$ | | |
| | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |
| | $-\infty$ | | | | $0$ |

**3)** La fonction $f$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[1,e]$. Pour tout $n>2$ nous avons $0 < \dfrac{1}{n} < \frac{1}{e}$ donc $\dfrac{1}{n} \in [f(1), f(e)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaire il existe une unique valeur $\alpha$ dans l'intervalle $[1,e]$ telle que $f(\alpha) = \dfrac{1}{n}$.

Conclusion : Pour tout $n > 2$ l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,e]$

**4)** Soit $(\alpha_n)$ la suite définie par : « pour tout $n>2$, $\alpha_n$ est la solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ dans l'intervalle $[1;e]$ ». L'existence de cette suite résulte directement de la question précédente. Pour tout $n>2$, il existe une unique valeur $\alpha_n$ telle que $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$. De surcroit $\alpha_n$ appartient ̀l'intervalle $[1,e]$.

**5)** Montrons que la suite $(\alpha_n)$ converge. Nous avons, par définition de la suite $(\alpha_n)$

$$f(\alpha_n) = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$$

Or $f$ est strictement croissante donc

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n$$

La suite $(\alpha_n)$ est donc décroissante. Etant minorée par 1 elle converge. Il reste à déterminer la limite de $(\alpha_n)$. Quand $n$ tend vers $+\infty$ $f(\alpha_n)$ tend vers 0, puisque c'est égale à $1/n$ ce qui nous donne une idée intuitive de la limite de $(\alpha_n)$ est 1... Il reste à le démontrer proprement... c'est-à-dire à montrer que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad n > n_0 \implies |\alpha_n - 1| < \epsilon$$

Soit donc $\epsilon > 0$. $f(1+\epsilon) > f(1)$ puisque $f$ est croissante et donc $f(1+\epsilon) > 0$. Or $\frac{1}{n}$ à pour limite 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > n_0 \qquad 0 < \frac{1}{n} < f(1+\epsilon)$$

Donc

$$\forall n > n_0 \qquad 1 < f(\alpha_n) < f(1+\epsilon)$$

$f$ est croissante strictement, donc

$$\forall n > n_0 \qquad 1 < \alpha_n < 1+\epsilon$$

En résumé

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall \in \mathbb{N} \qquad n > n_0 \implies 0 < \alpha_n - 1 < \epsilon$$

Conclusion : la suite $(\alpha_n)_{n>2}$ est décroissante, convergente et a pour limite 1.

**6)** L'étude de la suite $(\beta_n)$ est très similaire à celle de la suite $(\alpha_n)$. Sur l'intervalle $[e, +\infty[$ la fonction $f$ est continue et strictement décroissante. Dès que $n > 2$, $\frac{1}{n} \in [\lim\limits_{x\to\infty}, f(1)]$. Le théorème des valeurs intermédaires permet de conclure à éxistence d'une unique solution $\beta$ à l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ dans l'interfervalle $[e, +\infty[$

**7)** L'étude des variations résulte de la décroissance de $f$ sur l'intervalle $[e, +\infty[$

$$n+1 > n \implies \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \implies f(\beta_{n+1}) < f(\beta_n) \implies \beta_{n+1} > \beta_n$$

La suite $(\beta_n)$ est donc croissante.

Etudions la limite. Soit $A > 0$, on a $0 < f(A) < \dfrac{1}{e}$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > n_0 \qquad \frac{1}{n} < f(A)$$

Autrement dit

$$\forall n > n_0 \qquad f(\beta_n) < f(A)$$

et finalement, puisque $f$ est décroissante

$$\forall n > n_0 \qquad \beta_n > A$$

En résumé

$$\forall A > \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \implies \beta_n > A$$

C'est exactement la défintion de la divergence d'une suite vers $+\infty$.

Conclusion : la suite $(\beta_n)_{n>2}$ est croissante, minorée par $e$ et a pour limite $+\infty$.