Exercice - M0113C

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

son tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	

1) Etudions les variations de f sur $]-\infty, 0]$. Soient a et b deux réels négatifs tels que $a < b$. Calculons $f(b) - f(a)$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= -b^3 + 3b^2 - (-a^3 + 3a^2) \\ &= -b^3 + 3b^2 + a^3 - 3a^2 \\ &= a^3 - b^3 + 3(b^2 - a^2) \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + 3(b-a)(a+b) \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) - 3(a-b)(a+b) \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b) \\ &= (a-b)(a(a-3) + b(b-3) + ab) \end{aligned}$$

On a $a - b < 0$. Quant à la deuxième parenthèse, tous les termes sont positifs, du fait de la règle des signes. Donc $f(b) - f(a) < 0$ et donc $f(b) < f(a)$. f est donc décroissante sur l'intervalle $[-\infty, 0)$

2) Donnons les tableaux de variations des fonctions suivantes.

2a) $g(x) = f(x) + 4$. g est définie sur $\mathbb{R}$. Le tableau de g est le même que celui de f d'après le théorème sur les variations de $f + K$.

2b) $h(x) = \sqrt{f(x)}$. Au vu du tableau de variation de f, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Donc le domaine de définition de h est $\mathbb{R}$.L e tableau de h est le même que celui de g d'après le théorème sur les variations de $\sqrt{f(x)}$.

2c) $t(x) = -2f(x)$. Le domaine de t est le même que La fonction t est de la forme kf avec $k \in \mathbb{R}$ et k négatif. Les variations de t sont donc inverses de celles de f. Nous avons le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	

2d) $r(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Les variations de r sont inverses de celles de f. De plus r n'est pas définie en 0. D'ou le tableau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

On a à chaque fois appliqué des résultats de cours sur les fonctions associées !