Exercice - M0126C

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que f et g commutent.

1) Montrons la stabilité du noyau de f par g.

$$x \in \ker f \implies f(x) = 0 \implies g(f(x)) = 0 \implies g \circ f(x) = 0 \implies f \circ g(x) = 0 \implies f(g(x)) = 0$$

Donc $g(x) \in \ker f$ et donc $\ker f$ est stable par g.

Montrons maintenant la stabilité de l'image de f par g.

$$y \in \text{Im } f \implies \exists x \in E \quad y = f(x)$$

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$$

Donc $g(y) \in \text{Im } f$. L'image de f est donc stable par g

2) Soit p un projecteur et f un endomorphisme. Si p et f commutent alors l'image et le noyaux de p sont stables par f d'après la question précédente. Montrons la réciproque. Rappelons que

$$\forall y \in \text{Im f} \qquad p(y) = y$$

En effet, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et donc $p(y) = p(p(x)) = p^2(x) = p(x) = y$. On a évidement pour tout $y \in \ker p$ on a $p(y) = 0$.

Soit donc $x \in E$

$$p \circ f(x) = p \circ f(p(x) + x - p(x)) = p \circ f \circ p(x) - p \circ f(x - p(x))$$

Or

$$x - p(x) \in \ker p$$

En effet

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$$

$\ker p$ est stable par f donc

$$f(x - p(x)) \in \ker p \implies p \circ f(x - p(x)) = 0$$

Finalement

$$p \circ f(x) = p \circ f \circ p(x)$$

Mais $\text{Im } p$ est stable par f donc

$$p(x) \in \text{Im } p \implies f(p(x)) \in \text{Im } p \implies p(f(p(x)) = f(p(x))$$

Donc

$$p \circ f \circ p(x) = f \circ p(x)$$

Conclusion : $p \circ f(x) = f \circ p(x)$. p et f commutent.