Exercice - M0135C

1a) On recherche les points d'intersections s'ils existent de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$ d'équations respectives

$$y = \frac{1}{4}x^2 \qquad mx - y + 1 = 0$$

Ou encore

$$y = \frac{1}{4}x^2 \qquad y = mx + 1$$

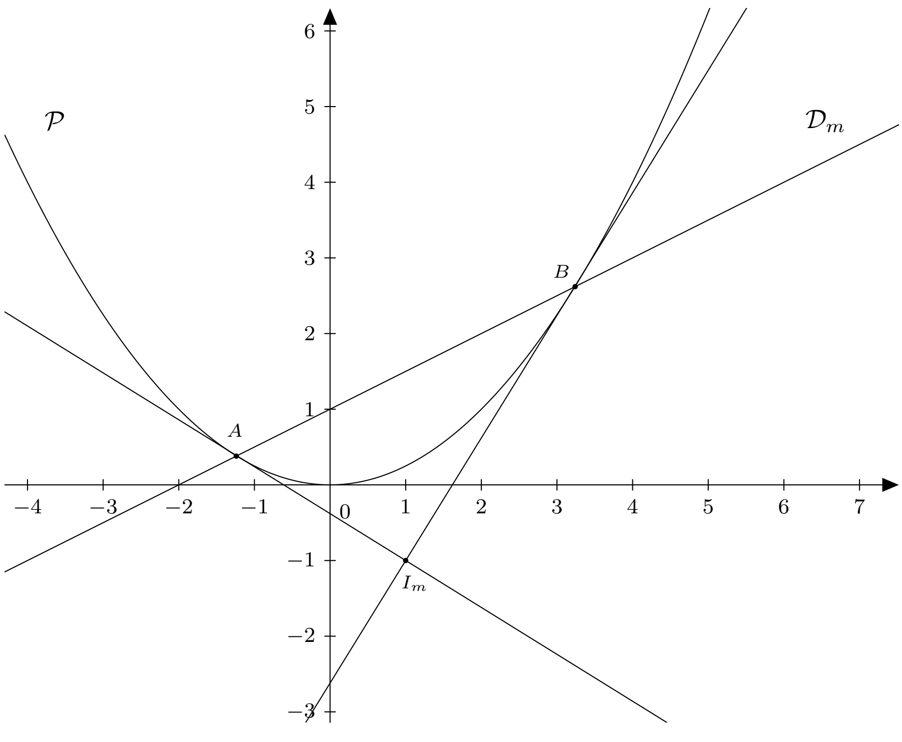
Les abscisses des points d'intersections sont solution de léquation

$$\frac{1}{4}x^2 = mx + 1 \iff \frac{1}{4}x^2 - mx - 1 = 0$$

On obtient donc une équation du second degré. Calculons son discriminant.

$$\Delta = m^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (-1) = m^2 + 1$$

Quel que soit la valeur de m, Δ est strictement positif. L'équation à donc deux solutions. Il y a donc deux points d'intersection entre la parabole $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}_m$. La figure ci-dessous représente la situation.



Calculons les coordonnées des points $A(x', y')$ et $B(x'', y'')$. Les solutions de l'équation sont

$$x' = \frac{m - \sqrt{m^2 + 1}}{2\frac{1}{4}} = 2m - 2\sqrt{m^2 + 1} \qquad x'' = \frac{m + \sqrt{m^2 + 1}}{2\frac{1}{4}} = 2m + 2\sqrt{m^2 + 1}$$

Calculons l'ordonné des points A et B

$$y' = \frac{1}{4}x'^2 = \frac{1}{4}(2m - 2\sqrt{m^2 + 1})^2) = \frac{1}{4}(4m^2 - 8m\sqrt{m^2 + 1} + 4(m^2 + 1)) = 2m^2 - 2m\sqrt{m^2 + 1} + 1$$

de même

$$y'' = \frac{1}{4}x''^2 = 2m^2 - 2m\sqrt{m^2 + 1} + 1$$

Conclusion :

$$\boxed{A(2m-2\sqrt{m^2+1};2m^2-2m\sqrt{m^2+1}+1) \qquad B(2m+2\sqrt{m^2+1};2m^2+2m\sqrt{m^2+1}+1)}$$

1b) x' et x'' sont les solutions de l'équation

$$\frac{1}{4}x^2-mx-1=0$$

Or pour une équation polynomiale du second degré

$$ax^2+bx+c=0$$

dont les racines sont x_1 et x_2. La somme et le produit des racines sont donnés par

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Donc, dans les cas présent

$$x'x''=\frac{-1}{\frac{1}{4}}=-4$$

Conclusion :

$$\boxed{x'x''=-4}$$

2a) Déterminons le point d'intersection des tangentes à $\mathcal{P}$ aux points A et B. Pour cela, nous allons

1. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en A
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en B
3. Déterminer le point d'intersection I_m des deux tangentes.

Considérons la fonction

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2$$

La courbe représentative de f est la parabole $\mathcal{P}$. L'équation des tangentes en A et en B sont données respectivement par :

$$y=f'(x')(x-x')+f(x') \qquad y=f'(x'')(x-x'')+f(x'')$$

Calculons la dérivée de f

$$f'(x)=\frac{1}{4}2x=\frac{x}{2}$$

Nous en déduisons l'équation de la tangente en A

$$\begin{aligned} y &= \frac{2m-2\sqrt{m^2+1}}{2}(x-(2m-2\sqrt{m^2+1}))+\frac{1}{4}(2m-2\sqrt{m^2+1})^2 \\ &= (m-\sqrt{m^2+1})(x-2m+2\sqrt{m^2+1})+2m^2+2m\sqrt{m^2+1}+1 \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation de la tangente en A

$$y=(m-\sqrt{m^2+1})(x-2m+2\sqrt{m^2+1})+2m^2-2m\sqrt{m^2+1}+1$$

De la mm̂eme façon on obtient l'équation de la tangente en B

$$y=(m+\sqrt{m^2+1})(x-2m-2\sqrt{m^2+1})+2m^2+2m\sqrt{m^2+1}+1$$

Recherchons le point d'intersection de ces deux droites. On résout

$$\begin{aligned} &(m-\sqrt{m^2+1})(x-2m+2\sqrt{m^2+1})+2m^2-2m\sqrt{m^2+1}+1= \\ &(m+\sqrt{m^2+1})(x-2m-2\sqrt{m^2+1})+2m^2+2m\sqrt{m^2+1}+1 \end{aligned}$$

$$mx - 2m^2 + 2m\sqrt{m^2+1} - \sqrt{m^2+1}x + 2\sqrt{m^2+1} - 2(m^2+1) + 2m^2 - 2m\sqrt{m^2+1} + 1 =$$
$$mx - 2m^2 - 2m\sqrt{m^2+1} + \sqrt{m^2+1}x - 2m\sqrt{m^2+1} - 2(m^2+1) + 2m^2 + 2m\sqrt{m^2+1} + 1$$

Qui après simplification conduit à

$$2m\sqrt{m^2+1} - \sqrt{m^2+1}x = -2m\sqrt{m^2+1} + \sqrt{m^2+1}x$$

et donc

$$2\sqrt{m^2+1}x = 4m\sqrt{m^2+1}$$
$$x = 2m$$

Nous en déduisons l'ordonnée du point I_m

$$\begin{aligned} y &= (m - \sqrt{m^2+1})(2m - 2m + 2\sqrt{m^2+1}) + 2m^2 - 2m\sqrt{m^2+1} + 1 \\ &= 2m\sqrt{m^2+1} - 2(m^2+1) + 2m^2 - 2m\sqrt{m^2+1} + 1 \\ &= -2m^2 - 2 + 2m^2 + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Conclusion : les coordonnées du point I_m sont

$$\boxed{I_m(2m; -1)}$$

Remarque : il n'y a en fait pas besoin d'expliciter les coordonnées de A et B. En effet, revenons aux équations des tangentes :

$$y = f'(x')(x - x') + f(x') \qquad y = f'(x'')(x - x'') + f(x'')$$

et donc

$$y = \frac{x'}{2}(x - x') + \frac{x'^2}{4} \qquad y = \frac{x''}{2}(x - x'') + \frac{x''^2}{4}$$

On obtient le point d'intersection en résolvant l'équation

$$\frac{x'}{2}(x - x') + \frac{x'^2}{4} = \frac{x''}{2}(x - x'') + \frac{x^{""2}}{4}$$

d'ou en multipliant par 2

$$\begin{aligned} x'x - x'^2 + \frac{x'^2}{2} &= x''x - x''^2 + \frac{x''^2}{2} \\ \iff (x' - x'')x &= \frac{x'^2 - x''^2}{2} \\ \iff (x' - x'')x &= \frac{(x' - x'')(x' + x'')}{2} \\ \iff x &= \frac{x' + x''}{2} \qquad \text{car } x' - x'' \neq 0 \end{aligned}$$

Or nous avons vu précédement que

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m}{\frac{1}{4}} = 4m$$

Finalement, l'abscisse du point I_m est

$$x = \frac{4m}{2} = 2m$$

Pour le calcul de l'ordonné, nous avons

$$y = \frac{x'}{2}(2m - x') + \frac{x'^2}{4} = mx' - \frac{x'^2}{4} = -1$$

car x' est solution de l'équation

$$\frac{1}{4}x^2 - mx - 1 = 0 \implies \frac{1}{4}x'^2 - mx' - 1 = 0 \implies mx' - \frac{x'^2}{4} = -1$$

On retrouve les coordonnées du point $I_m(2m; -1)$

2b) Calculons $AI^2 + BI^2 - AB^2$. La première idée qui peut venir à l'esprit est calculer les distances à partir des coordonnées des points. On a

$$A\begin{pmatrix} 2m - 2\sqrt{m^2+1} \\ 2m^2 - 2m\sqrt{m^2+1} + 1 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} 2m + 2\sqrt{m^2+1} \\ 2m^2 + 2m\sqrt{m^2+1} + 1 \end{pmatrix} \qquad I_m\begin{pmatrix} 2m \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'ou

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4\sqrt{m^2+1} \\ 4m\sqrt{m^2+1} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 2\sqrt{m^2+1} \\ -2m^2 + 2m\sqrt{m^2+1} - 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -2\sqrt{m^2+1} \\ -2m^2 - 2m\sqrt{m^2+1} - 2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} AB^2 &= (4\sqrt{m^2+1})^2 + (4m\sqrt{m^2+1})^2 \\ &= 16m^2 + 32m + 16 \\ AI^2 &= 8m^4 + 16m^2 + 8 - (8m^3 + 8m)\sqrt{m^2+1} \\ BI^2 &= 8m^4 + 16m^2 + 8 + (8m^3 + 8m)\sqrt{m^2+1} \end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned} AI^2 + BI^2 - AB^2 &= 8m^4 + 16m^2 + 8 - (8m^3 + 8m)\sqrt{m^2+1} + 8m^4 + 16m^2 + 8 + (8m^3 + 8m)\sqrt{m^2+1} - AB^2 \\ &= 16m^2 + 32m^2 + 16 - (16m^2 + 32m + 16) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{AI^2 + BI^2 - AB^2 = 0}$$

Les calculs sont très laborieux. Une meilleurs méthode est la suivante ! La encore, il n'y a pas besoins d'expliciter les racine x' et x''...

$$A\left(x', \frac{x'^2}{4}\right) \qquad B\left(x'', \frac{x''^2}{4}\right) \qquad I_m(2m, -1)$$

d'ou

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x' - x'')^2 + \left(\frac{x'^2}{4} - \frac{x''^2}{4}\right)^2 \\ &= (x' - x'')^2 + (mx' + 1 - mx'' - 1)^2 \\ &= (x' - x'')^2 + (mx' - mx'')^2 \\ &= x'^2 - 2x'x'' + x''^2 + m^2x'^2 - 2m^2x'x'' + m^2x''^2 \\ &= (m^2+1)x'^2 + (m^2+1)x''^2 - 2x'x'' - 2m^2x'x'' \\ &= (m^2+1)(x'^2 + x''^2) - 2x'x'' - 2m^2x'x'' \\ AI^2 &= (2m - x')^2 + \left(-1 - \frac{x'^2}{4}\right)^2 \\ &= (2m - x')^2 + (2 + mx')^2 \\ &= 4m^2 - 4mx' + x'^2 + 4 + 4mx' + m^2x'^2 \\ &= 4m^2 + 4 + (m^2+1)x'^2 \\ BI^2 &= (2m - x'') + \left(-1 - \frac{x''^2}{4}\right)^2 \\ &= 4m^2 + 4 + (m^2+1)x''^2 \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}AI^2+BI^2-AB^2 &= 4m^2+4+(m^2+1)x'^2+4m^2+4+(m^2+1)x''^2-AB^2\\ &= 8m^2+8+(m^2+1)(x'^2+x''^2)-((m^2+1)(x'^2+x''^2)-2x'x''-2m^2x'x'')\\ &= 8m^2+8-2x'x''-2m^2x'x''\end{aligned}$$

Or

$$x'x''=-4$$

donc

$$AI^2+BI^2-AB^2=m^2+8-8-8m^2=0$$

Donc

$$AB^2=AI^2+BI^2$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABI_m est rectange en I_m. Autrement dit, les droites AI_m et BI_m sont perpendiculaires.

Enfin, la meilleure méthode est la suivante : Les coefficients directeurs des tangentes en A et B sont respectivement $f'(x')$ et $f'(x'')$. Or

$$f'(x)=\frac{1}{4}2x=\frac{x}{2}\implies f'(x')=\frac{x'}{2}\qquad f'(x'')=\frac{x''}{2}$$

et donc

$$f'(x')\cdot f'(x'')=\frac{x'}{2}\cdot\frac{x''}{2}=\frac{x'x''}{4}=-1$$

Les tangentes sont donc perpendiculaires. On utilise alors la réciproque du théorème de Pythagore pour conclure.

2c) Lorsque m décrit $\mathbb{R}$, le point I_m décrit la droite horizontale d'équation $y=-1$.