Exercice - M0136C

Soit n un entier naturel non nul, R un nombre réel strictement positif et (z_k) la suite définie par :

$$z_0 = R \qquad z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{n}} z_k$$

(z_k) est une suite géométrique de premier terme $z_0 = R$ et de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Donc

$$z_k = Re^{i\dfrac{2j\pi}{n}}$$

Calculons

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| Re^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}} - Re^{i\frac{2k\pi}{n}} \right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} R \left| e^{i\frac{2k\pi}{n}} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1 \right) \right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} R \left| e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right| \cdot \left| e^{i\frac{\pi}{n}} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}} \right) \right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} R \left| e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right| \cdot \left| e^{i\frac{\pi}{n}} 2i \frac{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2i} \right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} R \left| e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right| \cdot \left| e^{i\frac{\pi}{n}} \right| \cdot |2i| \left| \frac{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2i} \right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2R \left| \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right|
\end{aligned}$$

Les termes de la somme ne dépendent pas de k et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = 2Rn \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi R \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}}$$

Or

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = \lim_{n\to\infty} 2\pi R \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}} = 2\pi R$$

Conclusion

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = 2\pi R$$

Interprétration : les points M_k d'affixe z_k sont situés sur un cercle de centre R et forme un polygone régulier à n cotés. La somme étudiée est le périmètre du polygone. Quand n tend vers l'infini, le périmètre du polygone tend vers le périmètre du cercle de rayon R.