Exercice - M0138C

Recherchons un équivalent de la somme : $\sum_{k=0}^{n} k!$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k! &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{n!}{n!} \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n(n-1)} + 1
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \leq n-2$, nous avons

$$\begin{aligned}
& 0 \leq k \leq n-2 \\
\Longrightarrow\ & 0 \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{(n-2)!}{n!} \\
\Longrightarrow\ & 0 \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1} \\
\Longrightarrow\ & 0 \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{n-2+1}{n(n-1)} \\
\Longrightarrow\ & 0 \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons (théorème des gendarmes)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} = 0$$

et évidement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0$$

Revenons à la somme des factorielles

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} k! = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n(n-1)} + 1$$

Nous avons donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} k! = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n(n-1)} + 1 \right)$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} k! = 1$$

Conclusion

$$\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$$