Exercice - M0142C

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(iz + 1 + i\sqrt{3}(z^2 - 2z + 4) = 0$$
et donner les solutions sous la forme algébrique. Il s'agit d'une équation produit nul donc

$$iz + 1 + i\sqrt{3} = 0 \qquad \text{ou} z^2 - 2z + 4 = 0$$

Pour la première équation

$$iz + 1 + i\sqrt{3} = 0 \iff iz = -1 - i\sqrt{3} \iff z = \frac{-1 - \sqrt{3}}{i} \iff z == i - \sqrt{3}$$

La deuxème équation est un polynome du second degré

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

Calculons le discriminant, puis les racines

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$$

Les solutions sont donc

$$z_1 = \frac{-(-2) - i\sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{2 - i2\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-2) + i\sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{2 + i2\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

Conclusion
$$ureS = \{-\sqrt{3} + i; 1 - i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}\}$$

2 On considère les nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = -\sqrt{3} + i$ et on appelle A et B les points d'affixes respectives a et b.

2a) Recherchons les formes exponentielles de a et b

$$a = 1 + i\sqrt{3} \implies |a| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \implies a = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

donc
$$a = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

de même
$$b = -\sqrt{3} + 1 \implies |a| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \implies a = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

donc
$$b = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Conclusion
$$a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad\qquad b = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

2b) Voir fin du document

2c) Montrons que le triangle OAB est rectangle isocèle. Nous avons

$$OA = |a| = 2quadOB = |b| = 2 \implies OA = OB$$

Le triangle OAB est donc isocèle de sommet principal O. Montrons qu'il est rectangle.

$$\text{mes}\,\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}} = \arg\frac{b}{a}$$

Or

$$\frac{b}{a} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc

$$\arg\frac{b}{a} = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

et donc

$$\text{mes}\ \widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}} = \frac{\pi}{2}$$

L'angle $\widehat{AOB}$ est droit.

Conclusion : le triangle OAB est un triangle rectangle isocèle.

2d) Calculons l'affixe du point K milieu du segment $[AB]$.

$$k = \frac{a+b}{2} = \frac{-\sqrt{3}+i+1+i\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion

$$k = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

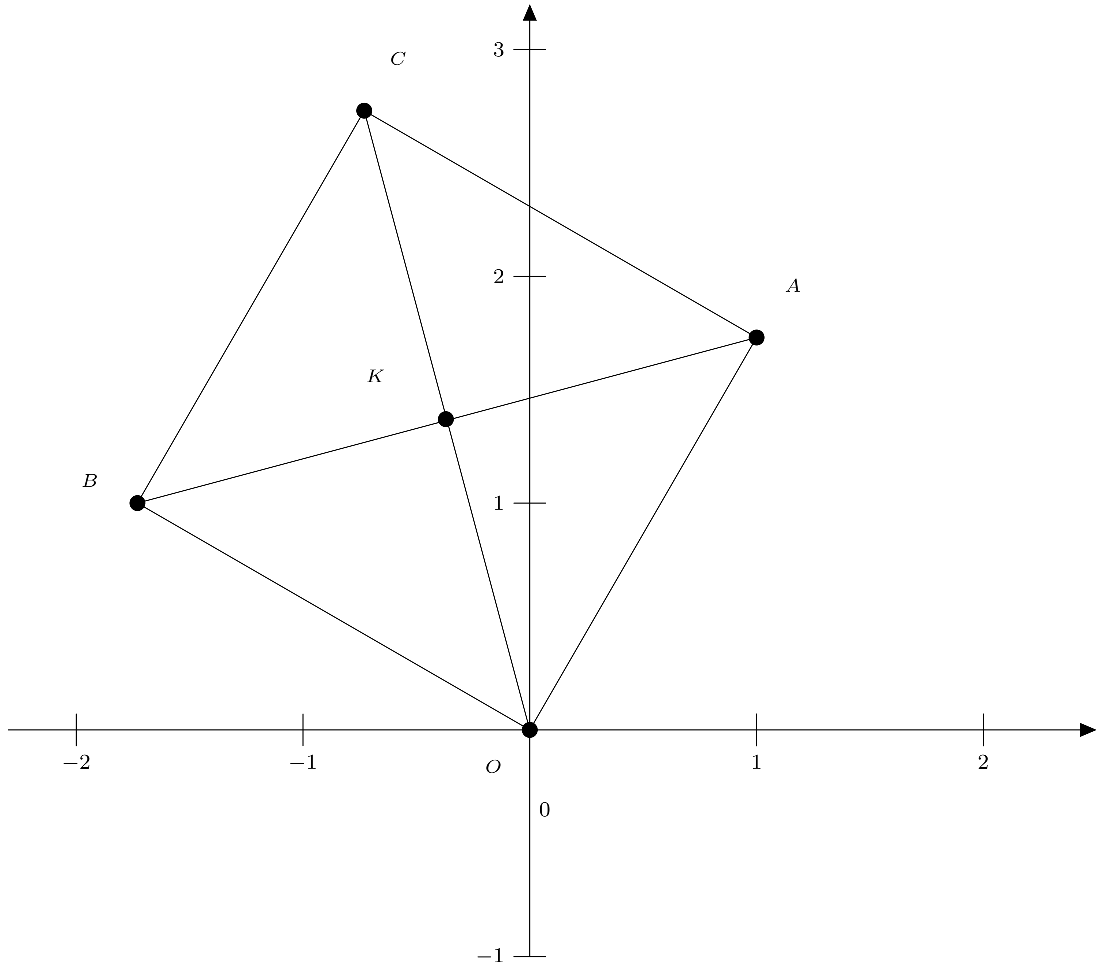
3) On considère le complexe $c = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$ et on appelle C el point d'affixe c. Calculons l'affixe m du milieu du segment $[OC]$

$$m = \frac{c+0}{2} = \frac{c}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = k$$

Conclusion : K est le milieu du segment $[OC]$.

3b) Montrons que le quadrilatère $OACB$ est un carré. Les segments $[AB]$ et $[OC]$ ont même milieu, donc le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme. OA et OB sont égaux, donc nous avons deux cotés consécutifs égaux, ce qui en fait un losange. Enfin, l'angle AOB est droit, donc c'est un rectangle et donc c'est un carré.

Conclusion : Le quadrilatère $OACB$ est un carré.


C
A
K
B
O
3
2
1
0
−1
−2
−1
1
2