Exercice - M0147C

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 2u_n + 6$$

1) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6$$

Pour $n = 0$, nous avons

$$u_0 = 3 \qquad 9 \times 2^0 - 6 = 3$$

La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vraie au rang n, c'est-à-dire que $u_n = 9 \times 2^n - 6$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} - 6$. Nous avons par définition de (u_n) :

$$u_{n+1} = 2u_n + 6$$

Compte tenu de l'hypothèse de réccurence, il vient

$$u_{n+1} = 2 \times (9 \times 2^n - 6) + 6 = 9 \times 2^{n+1} - 12 + 6 = 9 \times 2^n - 6$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Nous pouvons conclure que, pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n - 6$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \times 2^n - 6}$$

2) Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

$$u_n = 9 \times 2^n - 6 = 3 \times 3 \times 2^{n-1} \times 2 - 6 = 6 \times 3 \times 2^{n-1} - 6 = 6 \times (3 \times 2^{n-1} - 1)$$

Or pour, tout $n \geq 1$, $3 \times 2^{n-1} - 1$ est un entier et donc $u_n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, u_n est divisible par 6. La suite (v_n) sera donc une suite d'entiers.

3) L'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier »est-elle vraie ou fausse ? Calculons les premiers termes de la suite (v_n).

$$v_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$$

Donc

$$v_1 = 2 \qquad v_2 = 5 \qquad v_3 = 11 \qquad v_4 = 23 \qquad v_5 = 47 \qquad v_6 = 95$$

v_6 est divisible par 5. La propriété est donc fausse.

4a) Montrons que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$. Par définition de (u_n), nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 2u_n + 6$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad 6|u_n \qquad 6|u_{n+1}$$

Donc

$$\frac{u_{n+1}}{6} = \frac{2u_n + 6}{6} = 2\frac{u_n}{6} + 1$$

Autrement dit

$$v_{n+1} = 2v_n + 1$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 1 \qquad v_{n+1} - 2v_n = 1}$$

4b) Montrons que pour tout $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux. Reprenons l'égalité établie à la question 4a.

$$v_{n+1} - 2v_n = 1$$

Elle se réécrit

$$v_{n+1} \times 1 + v_n \times (-2) = 1$$

Autrement dit, il existe deux entiers relatifs $u = 1$ et $v = -2$, tels que

$$v_{n+1}u + v_n v = 1$$

D'après le théorème de Bezout, les entiers v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

4c) Soit d un diviseur commun de u_n et u_{n+1}. d divise toute combinaison linéaire de u_n et $_{n+1}$ donc d divise 6. Le PGCD de u_n et u_{n+1} divise donc 6. Or 6 divise u_n et u_{n+1} d'après la question 2). 6 est donc le PGCD de u_n et u_{n+1}

Conclusion : le PGCD de u_n et u_{n+1} est 6.

5a) Vérifions que $2^4 \equiv 1 \pmod 5$.

$$2^4 = 16 \qquad 16 = 5 \times 3 + 1 \implies 2^4 \equiv 1 \pmod 5$$

Conclusion : on a bien

$$2^4 \equiv 1 \pmod 5$$

5b) Considérons le cas ou $n = 4k + 2$. Montrons que u_n est divisible par 5. Nous avons

$$n = 4k + 2 \qquad u_n = 9 \times 2^n + 6$$

Donc

$$\begin{gathered}
2^4 \equiv 1 \pmod 5 \\
2^{4k} \equiv 1^k \pmod 5 \\
2^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5 \\
2^n \equiv 4 \pmod 5 \\
9 \times 2^n \equiv 9 \times 4 \pmod 5 \\
9 \times 2^n - 6 \equiv 36 - 6 \pmod 5 \\
u_n \equiv 30 \pmod 5 \\
u_n \equiv 0 \pmod 5
\end{gathered}$$

Donc u_n est divisible par 5.

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad 5 | u_{4k+2}$$

5c) Analysons la divisibilité par 5 éventuelle de u_n dans les autres cas. Nous pouvons écrire

$$n = 4k + r \qquad 0 \leq r < 5$$

Reprenons le calcul précédent de congruences

$$\begin{gathered}
2^4 \equiv 1 \pmod 5 \\
2^{4k} \equiv 1^k \pmod 5 \\
2^{4k+r} \equiv 2^r \pmod 5 \\
9 \times 2^n \equiv 9 \times 2^r \pmod 5 \\
9 \times 2^n - 6 \equiv 9 \times 2^r - 6 \pmod 5 \\
u_n \equiv 9 \times 2^r - 6
\end{gathered}$$

Nous obtenons alors

r	0	1	2	3	4
$9\times 2^r-6$	3	12	30	66	138
Modulo 5	3	2	0	1	3

Conclusion : u_n est divisible par 5 uniquement lorsque $n=4k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$