Exercice - M0152C

Soit X la variable aléatoire donnant la taille d'un danseur. X suit une loi normale de paramètres inconnus μ et σ^2 ($X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Introduisons la variable aléatoire Y définie par

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Y suit la loi normale centrée réduite ($Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$).

Nous avons les probabiltés suivantes

$$p(X \geq 1,75) = 0,6915 \quad \text{et} \quad p(X \leq 1,95) = 0,9332$$

or

$$X \geq 1,75 \iff X-\mu \geq 1,75-\mu \iff \frac{X}{\sigma} \geq \frac{1,75-\mu}{\sigma}$$

Autrement dit

$$X \geq 1,75 \iff Y \geq \frac{1,75-\mu}{\sigma} \quad \text{et} \quad X \leq 1,95 \iff Y \leq \frac{1,95-\mu}{\sigma}$$

Nous avons donc

$$p(X \geq 1,75) = p\left(Y \geq \frac{1,75-\mu}{\sigma}\right) = 0,6915 \quad \text{et} \quad p(X \leq 1,95) = p\left(Y \leq \frac{1,95-\mu}{\sigma}\right) = 0,9332$$

et donc nous avons

$$p\left(Y \leq \frac{1,75-\mu}{\sigma}\right) = 1-0,6915 \quad \text{et} \quad p(X \leq 1,95) = p\left(Y \leq \frac{1,95-\mu}{\sigma}\right) = 0,9332$$

En consultant une table de la loi normale centrée réduite (ou en utilsant FracNormale sur une Ti ou InvNormCD sur une Casio), on en déduit

$$\begin{cases} \dfrac{1,75-\mu}{\sigma} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1,95-\mu}{\sigma} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

On obtient donc un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont la résolution est immédiate

$$\begin{cases} 1,75-\mu = -\dfrac{1}{2}\sigma \\ 1,95-\mu = \dfrac{3}{2}\sigma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu - \dfrac{1}{2}\sigma + = 1,75 \\ \mu + \dfrac{3}{2}\sigma = 1,95 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mu - \sigma = 3,5 \\ 2\mu + 3\sigma = 3,9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\sigma = 0,4 \\ 2\mu = 3,6 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\mu = 1,8 \qquad \sigma = 0,1$$