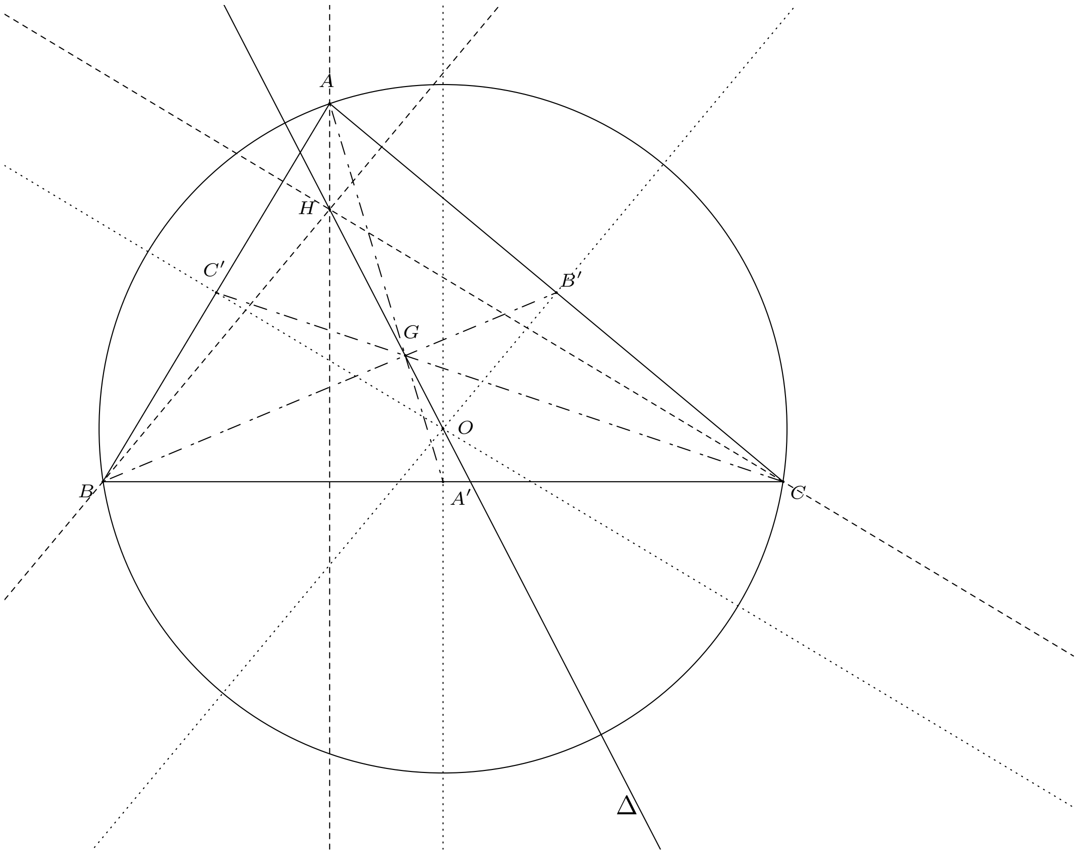
Exercice - M0155C

1) Tracons le triangle, les médianes, les médiatrices et les hauteurs, ainsi que leur point d'intersection et le cercle circonscrit.



2) Nous avons
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
et
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}\\&=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\\&=3\overrightarrow{OG}\end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{OK}=3\overrightarrow{OG}$. Les point O, G et K sont alignés.

3) Montrons que
$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$$

Nous avons
$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

De plus
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'B}$$

Or A' est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$. Finalement
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$$

Conclusion :
$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$$

Autrement dit, les droites (AK) et (OA') sont parallèles. Or, la droite (OA') est perpendiculaire à BC. En effet, O le centre du cercle circonscrit est l'intersection des médiatrices des segments $[AB], [AC]$ et $[BC]$. Donc la droite (OA') est perpendiculaire à la droite (BC). Il en est de même pour la droite (AK) qui lui est parallèle.

Conclusion : la droite (AK) est perpendiculaire à la droite (BC)

4) Nous avons montré que le point K est sur la hauteur issue de A. On montrerait de même que le point K est sur les hauteurs issues de B et de C autrement dit, K est le point d'intersection des hauteurs, c'est-à dire l'orthocentre. Pour cela, il suffit de reprendre les question 2) et 3) en remplacant A par B, puis A par C.

Conclusion : K est l'orthocentre du triangle.

5)) Nous avons démontré que O, G et K était aligné. Autrement, dans un triangle, le centre d'inertie, le centre du cercle circoncrit et l'orthocentre sont alignés.

Note : La droite qui contient ces trois point remarquables est appelée droite d'Euler, du nom de Leonhard Euler, mathématicien suisse (1707-1783) qui s'est illustré divers domaines mathématique.