Exercice - M0161C

1) Montrons que le repère est orthonormé. La base $ABCD$ est un carré, donc les diagonales AC et BD se coupent en leur milieu O, sont égales et sont perpendiculaire. On déduit

$$OB = OC \qquad OB \perp OC$$

La diagonale du carré est égale à 2, $AC = AO + OB = 2$, on en déduit par le théorème de Pythagore

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$2AB^2 = 4 \qquad AB = \sqrt{2}$$

Tous les arrêtes de la pyramide sont égales à $\sqrt{2}$, donc le triangle BDS est isocèle. O est le milieu de BD ; SO est donc la médiane du triangle BDS, mais c'est également la hauteur, l'angle $\widehat{BOS}$ est donc droit. Nous pouvons à nouveau appliquer le théorème de Pythagore, pour calculer OS.

$$OS^2 + 0B^2 = SB^2$$

$$OS = \sqrt{SB^2 - OB^2}$$

$$OS = \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1^2} = 1$$

Donc $OS = 1$ et OS est perpendiculaire à OB. On montre de même que OS est perpendiculaire à OC en considérant le triangle isocèle ACS. Pour résumer

$$OB = OC = OS = 1 \qquad OB \perp OC \quad OB \perp OS \quad OC \perp OS$$

Conclusion : Le repère $(O; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

2) Nous disponsons d'un repère orthonormé, nous pouvons donc exprimer les coordonnées des différents points dans ce repère.

$$S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{SD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\overrightarrow{SK}$ puis $K = S + \overrightarrow{SK}$.

$$\overrightarrow{SK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad K \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BK}$

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -\frac{4}{2} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires donc les points B, I et K sont alignés.

3) Calculons les coordonnées du point L intersection du plan BIC et de l'arrête SA. Les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont des vecteurs directeurs du plan BIC, plan qui passe évidement par B.

$$\overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{u} et \vec{v}$ sont également directeurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

On en déduit une représentation paramétrique du plan BIC.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t' \\ z = -t - t' \end{cases}$$

Cherchons une représentation paramétrique de la droite SA.

$$A\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad S\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

La représentation paramétrique de la droite SA est donc

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t'' \\ z = 1 + t'' \end{cases}$$

Le point d'intersection L vérifie les deux systèmes d'équation, en éliminant x, y et z, il vient

$$\begin{cases} 1 + 2t = 0 \\ 2t' = t'' \\ -t - t' = 1 + t'' \end{cases}$$

d'ou

$$\begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ 2t' - t'' = 0 \\ -t' - t'' = 1 + t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Par soustraction des deux dernières équations on obtient

$$\begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ t'' = 2t' \\ 3t' = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

et finalement

$$\begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ t' = -\dfrac{1}{6} \\ t'' = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

On en déduit les coordonnées de L

$$t'' = -\frac{1}{3} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = t'' \\ z = 1 + t'' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = 1 + \left(- -\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Conclusion :

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{LK}$

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On constate que

$$\overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont colináires. Les droites (AD) et (LK) sont parallèles.