Exercice - M0162C

1) Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G, telles que $g \circ f$ soit surjective. Montrer que g est surjecitve.

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ x & & y & & z \end{array}$$

$g \circ f$ est surjection donc

$$\forall z \in G \quad \exists x \in E \qquad g \circ f(x) = z$$

Posons $y = f(x)$ on

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = z$$

donc

$$g(y) = z$$

$f(x)$ (ou y) est l'antécédent de de z par f. f est surjective.

2) Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G, telles que $g \circ f$ soit injective. Montrer que f est injecitve. Soit x et x' deux éléments de E. Montrons que

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

$$f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

or $g \circ f$ est injective donc

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$$

donc

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

f est injective

3) Soit f une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ soient bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

$$\begin{array}{ccccccc} E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H \\ x & & y & & z & & t \end{array}$$

Si $g \circ f$ est bijective alors $g \circ f$ est surjective et donc g est surjective (d'après la question 1)). De même, si $h \circ g$ est bijective alors $h \circ g$ est injective et donc g est injective. g est injective et surjective, donc g est bijective. g admet donc une bijection réciproque g^{-1}. On a$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ donc f est bijective, puisque c'est la composition de deux applications bijectives. De même $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective, puisque c'est la composition de deux application bijectives.

On peut montrer directvement que f est surjective.

$$y \in F \quad z = g(y)$$

$g \circ f$ est bijective donc

$$\exists x \in F \qquad g \circ f(x) = z$$

donc, g est injective

$$g \circ f(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = y$$

y a un antécédent et donc f est surjective.

On peut également montrer directement que h est injective.

$$(z, z') \in G \times G \qquad \text{tel que} \quad h(z) = h(z')$$

g est bijective, donc

$$\exists (y, y') \in F \times F \qquad z = g(y) \quad z' = g(y')$$

$$h(z) = h(z') \Rightarrow h(g(y)) = h(g(y')) \Rightarrow h \circ g(y) = h \circ g(y') \Rightarrow y = y' \Rightarrow g(y) = g(y') \Rightarrow z = z'$$

En résumé

$$h(z) = h(z') \Rightarrow z = z'$$

h est injective.