

Exercice - M0170C

Un géomètre souhaite mesurer la hauteur d'un obélisque. De sa position, il relève l'angle $\alpha = 45^\circ$ entre la base et le sommet du monument. Il recule d'une distance $d = 10m$ et relève à nouveau l'angle entre la base et le sommet et trouve une valeur $\beta = 30^\circ$. Quelle est la hauteur du monument ?

Soit h la hauteur de l'obélisque et D la distance entre la base du monument et l'observateur.

$$\tan \alpha = \frac{h}{D} \quad \tan \beta = \frac{h}{d + D}$$

On obtient donc un système de deux équations à deux inconnues D et h . La première équation donne.

$$D = \frac{h}{\tan \alpha}$$

En reportant D dans la seconde, on obtient

$$\tan \beta = \frac{h}{d + \frac{h}{\tan \alpha}}$$

$$\tan \beta = \frac{h \tan \alpha}{d \tan \alpha + h}$$

Et après produit en croix

$$d \tan \alpha \tan \beta + h \tan \beta = h \tan \alpha$$

$$(\tan \alpha - \tan \beta)h = d \tan \alpha$$

Conclusion

$$h = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} d$$

Numériquement

$$h = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} \times 10$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times 10 = \frac{\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} 10$$

Soit $h = 13,7m$