Exercice - M0172C

Soient E un espace vectoriel et f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\ f \subset \ker g$$

Supposons que $\mathrm{Im}\ f \subset \ker g$. Montrons que $g \circ f = 0$.

$$\forall x \in E \qquad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$

Or $f(x) \in \mathrm{Im}\ f$ donc $f(x) \in \ker g$ (puisque $\mathrm{Im}\ f \subset \ker g$). Par conséquent

$$\forall x \in E \qquad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = 0$$

Donc $g \circ f = 0$.

Réciproquement, supposons $g \circ f = 0$. Montrons que $\mathrm{Im}\ f \subset \ker g$

$$\forall y \in \mathrm{Im}\ f \qquad \exists x \in E \quad f(x) = y$$
$$g \circ f(x) = 0 \iff g\left(f(x)\right) = 0 \iff g(y) = 0 \iff y \in \ker g$$

Donc

$$\mathrm{Im}\ f \subset \ker g$$