Exercice - M0173C

Soit $ABCD$ un carré de coté a et de centre O. Soit I le milieu du segment $[OB]$ et J le milieu du segment $[CD]$. Montrons que le triangle AIJ est rectangle isocèle.

La géométrie analytique permet de r'ésoudre aisément ce type de problème sans trop réfléchir, juste en calculant. Introduisons les coordonnées des points, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

$$A(0,0) \qquad B(1,0) \qquad C(1,1) \qquad D(0,1)$$

Pour rappel, si M est le milieu de $[AB]$ les coodonnnées de M sont :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

et la distance AB est

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

O est le centre du carré donc le milieu de AC, on en déduit ses coordonnées en utilisant « la formule du milieu ».

$$x_O = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad y_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

De même pour I et J

$$x_I = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

et

$$x_J = \frac{1+1}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad y_J = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Nous avons donc obtenu

$$O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad I\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \qquad J\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Calculons les longueurs des cotés du triangle AIJ

$$AI = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$
$$IJ = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$
$$AJ = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Nous avons $AI = IJ$, le triangle est donc isocèle.

$$AI^2 + IJ^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = 2\frac{10}{16} = \frac{5}{4} \qquad \text{et} \qquad AJ^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Donc

$$AJ^2 = AI^2 + IJ^2$$

Le triangle AIJ est donc rectangle en I d'après le théorème de Pythagore (ou sa réciproque)

Conclusion : le triangle AIJ est rectangle isocèle de sommet principal I.