Exercice - M0174C

Soit MNP un triangle équilatéral. Nous avons donc

$$MN = MP = NP \qquad \text{mes } \widehat{\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}} = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

Donc

$$|m-n| = |m-p| = |n-p| \qquad \arg\frac{m-n}{p-n} = \frac{\pi}{3}$$

Nous en déduisons également

$$\left|\frac{m-n}{p-n}\right| = \frac{|m-n|}{|p-n|} = 1$$

Et donc

$$\frac{|m-n|}{|p-n|} = 1 \qquad \text{et} \qquad \arg\frac{m-n}{p-n} = \frac{\pi}{3} \implies \frac{m-n}{p-n} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Nous avons également les propriétés suivante de $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$j^3 = 1 \qquad j^2 = \bar{j} \qquad \bar{j}^3 = 1 \qquad 1 + j + j^2 = 0$$

$$-j^2 = -\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = -e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc

$$\frac{m-n}{p-n} = -j^2$$

Il vient

$$m - n = -j^2p + J^2n \implies m + n(-j^2 - 1) + pj^2 = 0$$

et finalement

$$m + nj + pj^2 = 0$$

Réciproquement

$$m + nj + pj^2 = 0 \implies m + n(-1 - j^2) + pj^2 = 0 \implies \frac{m-n}{p-n} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Ce qui signifie

$$|m-n| = |p-n| \qquad \widehat{\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}} = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

Conclusion :

$\boxed{\text{« } MNP \text{ est équilatéral si et seulement si } m + nj + pj^2 = 0 \text{ »}}$