Exercice - M0176C

Soit E un epsace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer les équivalences suivantes

1. $\mathrm{Im\ f} \cap \ker f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$
2. $\mathrm{Im\ f^2} = \mathrm{Im}\ f \iff E = \mathrm{Im}\ f + \ker f$

Montrons la première équivalence. Supposon que $\mathrm{Im\ f} \cap \ker f = \{0_E\}$

$$x \in \ker f \implies f(x) = 0 \implies f(f(x)) = 0 \implies f^2(x) = 0 \implies x \in \ker f^2$$

Donc $\ker f \subset \ker f^2$ de façon évidente. Montrons la deuxième inclusion $\ker f^2 \subset \ker f$.

$$x \in \ker f^2 \implies f(f(x)) = 0 \implies f(x) \in \mathrm{Im\ f} \text{ et } f(x) \in \ker f$$

donc

$$f(x) \in \mathrm{Im}\ f \cap \ker f \implies f(x) = 0_E \implies x \in \ker f$$

et donc

$$\ker f^2 \subset \ker f$$

Réciproquement, supposons $\ker f \subset \ker f^2$. Montrons que $\mathrm{Im}\ f \cap \ker f = \{0_E\}$

$$y \in \mathrm{Im}\ f \cap \ker f \qquad \exists x \in E \quad f(x) = y \quad \text{et} \quad f(y) = 0$$

donc

$$y = f(x) \implies f(y) = f^2(x) = 0 \implies x \in \ker f^2 \implies x \in \ker f \implies f(x) = 0 \implies y = 0$$

En résumé

$$y \in \mathrm{Im}\ f \cap \ker f \implies y = 0_E$$

et donc

$$\mathrm{Im\ f} \cap \ker f = \{0_E\}$$

Conclusion :

$$\mathrm{Im\ f} \cap \ker f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$$

Montrons la deuxième équivalence. Supposons $E = \mathrm{Im}\ f + \ker f$. Montrons que $\mathrm{Im}\ f^2 = \mathrm{Im}\ f$.

$$y \in \mathrm{Im}\ f^2 \implies \exists x \in E \quad f^2(x) = y \implies f\left(f(x)\right) = y \implies y \in \mathrm{Im}\ f$$

donc $\mathrm{Im}\ f^2 \subset \mathrm{Im}\ f$. Montrons la deuxième inclusion $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Im}\ f^2$.

$$z \in \mathrm{Im}\ f \quad \exists y \in E \quad z = f(y)$$

$$y = y_I + y_K \qquad y_I \in \mathrm{Im}\ f \qquad y_K \in \ker f$$
$$\exists x \in E \qquad y_I = f(x)$$

Donc

$$z = f(y) = f(y_I + y_K) = f(y_I) + f(y_K) = f(f(x) + 0_E = f \circ f(x)$$

donc

$$z \in \mathrm{Im}\ f^2$$

et donc

$$\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Im}\ f^2$$

Nous avons donc $\mathrm{Im}\ f^2 \subset \mathrm{Im}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Im}\ f^2$ et finalement

$$\mathrm{Im}\ f^2 = \mathrm{Im}\ f$$

Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}\ f^2 = \mathrm{Im}\ f$. Montrons que $E = \mathrm{Im}\ f + \ker f$. Nous avons évidement

$$\mathrm{Im}\ f + \ker f \subset E$$

$$x \in E \qquad f(x) \in \text{Im } f$$

donc

$$f(x) \in \text{Im } f^2 \implies \exists a \in E \quad f(x) = f^2(a)$$

Posons $u = f(a)$ et $v = x - u$. $u = f(a)$ appartient à Im f.

$$f(v) = f(x-u) = f(x) - f(u) = f(x) - f(f(a) = f(x) - f^2(a) = f(x) - f(x) = 0$$

donc

$$v \in \ker f$$

$$x = u + v \qquad u \in \text{Im } f \quad \text{et} \quad v \in \ker f$$

Conclusion :

$$\text{Im f}^2 = \text{Im } f \iff E = \text{Im } f + \ker f$$