Exercice - M0181C

1) Montrons que les arrêtes opposées sont perpendiculaires. En utilisant le produit scalaire et la relation de Chasles nous obtenons

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

On a bien orthogonalité entre les arrêtes AB et OC. On montre de même que

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

On peut également raisonner géométriquement. L'arrête OC est perpendiculaire aux arrêtes OB et OA donc OC est perpendiculaire au plan OAB donc OC est perpendiculaire à toute droite du plan OAB donc OC est perpendiculaire à AB. On démontre de même pour AC et BC.

2) OH est perpendiculaire au plan ABC donc OH est perpendiculaire à la droite (AB). Par ailleurs, la droite OC est perpendiculaire à AB, nous l'avons montré dans la première question. Les droites (OH) et (OC) sont sécantes en O. Donc AB est perpendiculaire à deux droites sécante du plan OCH, donc la droite (AB) est perpendiculaire au plan OCH.

3) Le triangle OAB est rectangle en O. Son aire OAB s'exprime de deux façon difféntes

$$OAB = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{OK \times AB}{2}$$

On en déduit

$$OA \cdot OB = OK \cdot AB$$

$$OA^2 \cdot OB^2 = OK^2 \cdot AB^2$$

et en utilisant le théorème de Pythagore

$$OA^2 \cdot OB^2 = OK^2 \cdot (OA^2 + OB^2)$$

d'ou

$$\frac{1}{OK^2} == \frac{OA^2}{OA^2 \cdot OB^2} + \frac{OB^2}{OA^2 \cdot OB^2}$$

et finalement

$$\frac{1}{OK^2} == \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

On peut faire de même dans le triangle OKC on a alors

$$\frac{1}{OH^2} == \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2}$$

Conclusion

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

4) Exprimons le volume du tétraèdre.

$$V = \frac{1}{3}\frac{OA \times OB}{2}OC = \frac{1}{3}ABC \times OH$$

5) On en déduit

$$\frac{OA \cdot OB \cdot OC}{2} = ABC \cdot OH$$

En élevant au carré

$$ABC^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{4OH^2}$$

$$ABC^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{4}\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\right)$$

$$ABC^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{4OA^2} + \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{4OB^2} + \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{4OC^2}$$
$$ABC^2 = \frac{OB^2 \cdot OC^2}{4} + \frac{OA^2 \cdot OC^2}{4} + \frac{OA^2 \cdot OB^2}{4}$$

Conclusion :

$$ABC^2 = OAB^2 + OAC^2 + OBC^2$$

6) Nous pouvons réécrire l'égalité

$$ABC^2 = \frac{OB^2 \cdot OC^2}{4} + \frac{OA^2 \cdot OC^2}{4} + \frac{OA^2 \cdot OB^2}{4}$$

en

$$ABC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

7) Le vecteur $\overrightarrow{OH'}$ est un vecteur normal.

$$\overrightarrow{OH'}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

L'équation du plan est donc de la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

Le point $H'(a; b; c)$ appartient au plan donc

$$a^2 + b^2 + c^2 + d = 0$$

Conclusion : l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est :

$$ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

8) Recherchons les points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes. Sur l'axe $x'Ox$ on a $y = z = 0$ d'ou

$$ax = a^2 + b^2 + c^2$$

et finalement

$$A'\begin{pmatrix} \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On procède de même pour les axes $y'Oy$ et $z'Oz$. On obtient les coordonnées des points d'intersection A', B' et C'

$$A'\begin{pmatrix} \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B'\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{b} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{c} \end{pmatrix}$$

9) Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2} &= \frac{1}{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{b}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{c}\right)^2} \\
&= \frac{a^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \\
&= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \\
&= \frac{1}{OH'^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : on retrouve bien la relation

$$\frac{1}{OH'^2} = \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2}$$