

Exercice - M0184

Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x .

1. Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier n supérieur ou égal à k :

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

2. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k :

$$\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$$

3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

4. Montrer que, pour tout entier supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$$

5. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$