Exercice - M0184C

1) Montrons par réccurence que

$$\forall n \geq k \qquad \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

Pour $n = k$, l'inégalité est trivalement vérifiée. Elle s'écrit :

$$\frac{k^k}{k!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

Supposons l'inégalité vérifiée pour n c'est-à-dire

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

Montrons qu'elle l'est pour $n+1$, c'est-à-dire :

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

Par hypothèse :

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

Or $n \geq k$ donc

$$\frac{k}{n+1} \leq 1$$

donc

$$\frac{k}{n+1}\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

et donc

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

et finalement

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

Ce qui démontre l'hérédité de la propriété et permet de conclure que

$$\forall n \geq k \qquad \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

2) L'inégalité précédente se réécrit

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{k^n}\frac{k^k}{k!}$$

x étant un réel positif, il suffit de multiplier membre à membre par x^n et on obtient

$$\frac{x^n}{n!} \leq \frac{x^n}{k^n}\frac{k^k}{k!}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq k \qquad \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$$

3) Nous avons $x < k$ donc

$$\frac{x}{k} < 1$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$$

(c'est la limite de q^n avec $q < 1$) x étant positif, nous avons

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$$

Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

4) Montrons par réccurence que

$$\forall n \geq 2 \qquad \frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$$

Pour $n = 2$

$$\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{2^{2-1}}{2!} = 1 \geq 1$$

La propriété est vraie. Supposons qu'elle soit vraie pour n. Montrons qu'elle est est vraie pour $n + 1$.

$$n + 1 \geq n$$

donc

$$(n + 1)^{n-1} \geq n^{n-1}$$

donc

$$\frac{(n + 1)^{n-1}}{n!} \geq \frac{n^{n-1}}{n!}$$

et en utilisant l'hypothèse de réccurence

$$\frac{(n + 1)^{n-1}}{n!} \geq \frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$$

et donc

$$\frac{n + 1}{n + 1} \cdot \frac{(n + 1)^{n-1}}{n!} \geq 1$$

d'ou

$$\frac{(n + 1)^n}{(n + 1)!} \geq 1$$

La propriété est donc vraie pour $n + 1$, et nous pouvons conclure

$$\forall n \geq 2 \qquad \frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$$

5) En multipliant l'inégalité précédente par n, on a

$$\frac{n^n}{n!} \geq n$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$