Exercice - M0185C

1) Calculons les longueurs inconnues. Introduisons la portée p et $\alpha = \text{mes}\ \widehat{ABC}$. Nous avons alors

$$BB' = p \qquad BC = \frac{p}{2} \qquad EF = \frac{p}{k} \quad \text{avec} \quad k = 10$$

a) Calcul de AC

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \implies AC = BC\tan\widehat{ABC} \implies AC = p\frac{\tan\alpha}{2} = \frac{7}{20}p$$

Numériquement

$$AC = \frac{7}{10} \times \frac{12}{2} = \frac{21}{5}$$

Conclusion :

$$AC = \frac{21}{5} = 4,2\ \text{m} \qquad AC = \frac{\tan\alpha}{2}p = \frac{7}{20}p$$

b) Calcul de la longueur de l'arbalétrier, c'est-à-dire de AB. Le triangle ACB étant rectangle en C, le théorème de pythagore donne.

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \implies AB = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p\tan\alpha}{2}\right)^2} = \frac{p}{2}\sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

Numériquement

$$\frac{12}{2}\sqrt{1+\left(\frac{7}{10}\right)^2} = 6\sqrt{\frac{100+49}{100}} = \frac{3\sqrt{149}}{5}$$

Conclusion :

$$AB = \frac{3}{5}\sqrt{149} = 7,32\ \text{m} \qquad AB = \frac{p}{2}\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{\sqrt{149}}{40}p$$

c) Calcul de la longueur BE. F est le milieu et la contre-fiche est perpendiculaire. On en déduit d'une part que le triangle ABE est isocèle de sommet principal E et le triangle BFE est rectangle en F. Le théorème de Pythagore donne.

$$BE^2 = BF^2 + EF^2 = \left(\frac{(AB}{2}\right)^2 + EF^2$$

Donc

$$BE = \sqrt{\left(\frac{p}{4}\sqrt{1+\tan^2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{p}{k}\right)^2} = p\sqrt{\left(\frac{1}{4}\sqrt{1+\tan^2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

Numériquement

$$BE = p\sqrt{\left(\frac{1}{4}\sqrt{1+\left(\frac{7}{10}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{p}{40}\sqrt{149+16} = \frac{3}{10}\sqrt{165} = 3,85\ \text{m}$$

Conclusion :

$$BE = \frac{3}{10}\sqrt{165} = 3,85\ \text{m} \qquad BE = p\sqrt{\left(\frac{1}{4}\sqrt{1+\tan^2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{\sqrt{165}}{40}p$$

d) Calcul de l'angle $\widehat{EAD}$. Nous avons

$$\tan\alpha = \tan\widehat{ABC} = \frac{7}{10} \implies \alpha = \widehat{ABC} = \arctan\left(\frac{7}{10}\right) = 35°$$

On en déduit l'angle $\beta = \widehat{BAC}$. La somme des angles du triangle ABC étant égal à 180°.

$$\beta = 180 - \widehat{ACB} - \alpha = 180 - 90 - 35 = 55°$$

Calculons maintenant l'angle $\gamma = \widehat{EAF}$

$$\tan \widehat{EAF} = \frac{EF}{AF} = \frac{\dfrac{p}{10}}{\dfrac{\sqrt{149}}{40}p} = \frac{4}{\sqrt{149}} \implies \gamma = \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{149}}\right) = 18,1°$$

On en déduit

$$\delta = \widehat{DAE} = \widehat{BAC} - \widehat{EAF} = \beta - \gamma$$

Numériquement

$$\delta = 55 - 18,1 = 36,9°$$

Le calcul de l'angle δ est nécessaire pour calculer les longueurs ED ou AD. Or pour ce calcul nous n'avons pas besoin de l'angle, mais uniquement de son sinus ou de son cosinus.

$$\begin{aligned}
\sin\delta &= \sin(\beta - \gamma) \\
&= \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta \\
&= \frac{\dfrac{p}{2}}{\dfrac{\sqrt{149}}{20}p} \times \frac{\dfrac{\sqrt{149}}{40}p}{\dfrac{\sqrt{165}}{40}p} - \frac{\dfrac{p}{10}}{\dfrac{\sqrt{165}}{40}p} \times \frac{\dfrac{7}{20}p}{\dfrac{\sqrt{149}}{20}p} \\
&= \frac{10}{\sqrt{149}} \times \frac{\sqrt{149}}{\sqrt{165}} - \frac{4}{\sqrt{165}} \times \frac{7}{\sqrt{149}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{165}}\left(10 - \frac{28}{\sqrt{149}}\right)
\end{aligned}$$

Numériquement, on retrouve la valeur de l'angle.

$$\sin\delta = 0,5999 \implies \delta = 36,9°$$

e) Calcul de la longueur ED et AD

$$ED = AE\sin\delta \qquad AD = AE\cos\delta$$

$$ED = \frac{\sqrt{165}}{40}p \times \frac{1}{\sqrt{165}}\left(10 - \frac{28}{\sqrt{149}}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{10\sqrt{149}}\right)p$$

Numériquement

$$ED = 2,31 \text{ m} \qquad AD = 3,08 \text{ m}$$

2) Calcul de la longueur totale des barres.

Cote	Expression	Longueur
BC	$\dfrac{p}{2}$	6
AB	$\dfrac{\sqrt{149}}{40}p$	7,32
AC	$\dfrac{7}{20}p$	4,20
AE	$\dfrac{\sqrt{165}}{40}p$	3,85
BE	$\dfrac{\sqrt{165}}{40}p$	3,85
DE	$\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{10\sqrt{149}}\right)p$	2,31
EF		1,20

Ainsi, compte tenu de la symétrie

$$L = 2(AB + AE + BE + ED + EF) = 2(7,32 + 3,85 + 2,31 + 1,20) = 37,06 \text{ m}$$

Conclusion : il faut un peu plus de 37 m de poutre pour constuire la ferme.