Exercice - M0187

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies, pout tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$v_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. Calculer u_2, v_2 et u_3, v_3.
2. On pose $w_n = v_n - u_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique puis préciser sa limite.
3. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
4. Montrer que pour tout n : $1 \leq u_n \leq v_n \leq 12$
5. Montrer que (u_n) et (v_n) converge et ont même limite.
6. On considère à présent la suite (t_n) définie, pout tout entier $n \geq 1$ par : $t_n = 3u_n + 8v_n$ Montrer que la suite (t_n) est constante.
7. Calculer la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Remarque : On dit que deux suites sont adjacentes, si l'une est croissante, l'autre décroissante et leur différence converge vers zéro. Les suites (u_n) et (v_n) constituent un couple de suites adjacentes. Il est aisé de démontrer que si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et elles ont même limite.