Exercice - M0187C

1) Le calcul des premiers termes est le suivant :

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{1+2\times 12}{3} = \frac{25}{3}\\
v_2 &= \frac{1+3\times 12}{4} = \frac{37}{4}\\
u_3 &= \frac{\frac{25}{3}\times 2\times\frac{37}{4}}{3} = \frac{\frac{50}{6}+\frac{111}{6}}{3} = \frac{161}{18}\\
v_3 &= \frac{\frac{25}{3}+3\times\frac{37}{4}}{4} = \frac{\frac{100}{12}+\frac{333}{12}}{4} = \frac{433}{48}\\
u_4 &= \frac{\frac{161}{18}+2\times\frac{433}{48}}{3} = \frac{\frac{644}{72}+\frac{1299}{72}}{3} = \frac{1943}{216}\\
v_4 &= \frac{\frac{161}{18}+3\times\frac{433}{48}}{4} = \frac{\frac{1288}{144}+\frac{3897}{144}}{4} = \frac{5185}{576}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$u_1 = 1 \qquad u_2 = \frac{25}{3} \qquad u_3 = \frac{161}{18} \qquad u_4 = \frac{1943}{216}$$

$$v_1 = 12 \qquad v_2 = \frac{37}{4} \qquad v_3 = \frac{433}{48} \qquad v_4 = \frac{5185}{576}$$

2) On pose $w_n = u_n - v_n$. Montrons que (w_n) est géométrique

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1}\\
&= \frac{u_n+3v_n}{4} - \frac{u_n+2v_n}{3}\\
&= \frac{3u_n+9v_n}{12} - \frac{4u_n+8v_n}{12}\\
&= \frac{v_n-u_n}{12}\\
&= \frac{1}{12}w_n
\end{aligned}$$

On a

$$w_1 = v_1 - u_1 = 12 - 1 = 11$$

Conclusion : (w_n) est une suite géométrique de premier $w_1 = 11$ et de raison $q = \frac{1}{12}$. La limite de la suite (w_n) est zéro (sa raison est plus petite que 1).

3) Montrons que la suite (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n+2v_n}{3} - u_n\\
&= \frac{u_n+2v_n-3u_n}{3}\\
&= \frac{2}{3}(v_n-u_n)\\
&= \frac{2}{3}w_n
\end{aligned}$$

Or

$$\forall n \geq 1 \qquad w_n = \frac{11}{12^{n-1}} \qquad w_n > 0$$

donc

$$\forall n \geq 1 \qquad u_{n+1} - u_n > 0 \implies u_{n+1} > u_n$$

La suite (u_n) est donc croissante.

On détermine de même les variations de (v_n).

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n \\ &= \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} \\ &= \frac{(u_n - v_n)}{4} \\ &= -\frac{1}{4} w_n \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \geq 1 \qquad v_{n+1} - v_n < 0 \implies v_{n+1} > v_n$$

La suite (v_n) est décroissante

4) (u_n) est croissante donc $\forall n \geq 1 \qquad u_n \geq u_0$. De mm̂em (v_n) est décroissante $v_n < v_0$. Il reste à établir l'inégalité $u_n < v_n$. Nous procédons par réccurence. Pour $n = 1$ c'est vrai, on a bien $u_1 < v_1$. Supposons que $u_n < v_n$. Montrons que $u_{n+1} < v_{n+1}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ &= \frac{3u_n + 9v_n}{12} - \frac{4u_n + 8v_n}{12} \\ &= \frac{-u_n + v_n}{12} \\ &= \frac{v_n - u_n}{12} \end{aligned}$$

Comme $v_n - u_n > 0$ on a également $v_{n+1} - u_{n+1} >$ et donc $v_{n+1} > u_{n+1}$. Nous pouvons conclure que

$$\forall n \geq 1 \qquad v_n > u_n$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad 1 \leq u_n \leq v_n \leq 12$$

5) D'après ce qui précède, (u_n) est croissante majorée donc converge. (v_n) est décroissante minorée donc converge également. Soit ℓ_u et ℓ_v leur limite. Nous avons, pour les trois suites convergentes

$$\forall n \geq 1 \qquad w_n = v_n - u_n$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} v_n - \lim_{n \to +\infty} u_n$$

et donc

$$0 = \ell_u - \ell_v \implies \ell_u = \ell_v$$

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et on même limite.

6) On considère maintenant la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrons que cette suite est constante :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 8v_{n+1} \\ &= 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n \\ &= 3u_n + 8v_n \\ &= t_n \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad t_{n+1} = t_n$$

Conclusion : la suite (t_n) est constante.

7) La suite (t_n) est convergente (théorème sur les opérations sur les limites). On a

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 3 \lim_{n\to+\infty} u_n + 8 \lim_{n\to+\infty} v_n$$

La limite de (t_n) est évidement $\ell = 3 \times u_1 + 8 \times v_1 = 3 + 96 = 99$. Il vient

$$99 = 3\ell + 8\ell = 11\ell \implies \ell = \frac{99}{11} = 9$$

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 9.